الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية

# الرياضيات

## السنة الثالثة من التعليم الثانوي العام و التكنولوجي

# كتاب الأستاذ

| | | |
|---|---|---|
| المؤلفون: | محمد فاتح مراد | مفتش التربية والتكوين |
| | جمال تاوريرت | مفتش التربية والتكوين |
| | محمد قورين | مفتش التربية والتكوين |
| | عبد الحفيظ فلاح | أستاذ التعليم الثانوي |
| | عبد المؤمن موس | أستاذ التعليم الثانوي |
| | غريسي بلجيلالي | أستاذ التعليم الثانوي |

# كتاب الأستاذ

الشعب: • رياضيات
• تقني رياضي
• علوم تجريبية

# الجزء الأول

# الباب الأول

# النهايات و الاستمرارية

# الأنشطة

**النشاط الأول**

**تصحيح:**/

**الهدف:** مقاربة مفهوم نهاية منتهية لدالة عند عدد حقيقي.

**توجيهات:** يقدم النشاط كمدخل للفقرة " نهاية منتهية عند حقيقي " و يتم إنجازه ضمن أفواج.

**الحل:** بسيط

**النشاط الثاني**

**تصحيح:** /

**الهدف:** مقاربة نهاية دالة مركبة.

**توجيهات:** يقدم النشاط كمدخل للفقرة " نهايات دالة مركبة " و و يتم إنجازه ضمن أفواج كما يتم استعمال جهاز الداتاشو.

**الحل:** بسيط

**النشاط الثالث**

**تصحيح:** /

**الهدف:** مقاربة مفهوم الاستمرارية.

**توجيهات:** يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الاستمرارية " و يتم ضمن أفواج كما يتم استغلال جهاز الداتاشو.

**الحل:** بسيط.

**النشاط الرابع**

**تصحيح:** /

**الهدف:** مقاربة مبرهنة القيم المتوسطة و تطبيقاتها.

**توجيهات:** يقدم النشاط كمدخل للفقرة " مبرهنة القيم المتوسطة " و يتم ضمن أفواج.

**الحل:** بسيط

# الأعمال الموجهة

**إزالة حالة عدم التعيين**

**تصحيح:** /

**الهدف:** توظيف النهايات.

**توجيهات:** يقدم العمل في شكل أفواج .

**الحل:** بسيط

**إيجاد حصر لحل معادلة بالتنصيف**

**تصحيح:** /

**الهدف:** توظيف مبرهنة القيم المتوسطة.

**توجيهات:** يمكن تقديم العمل في شكل أفواج مع استعمال جهاز الداتاشو.

**الحل:** يكفي إتباع مختلف المراحل لبلوغ النتائج المتوخاة,.

# التمارين

## تمارين تطبيقية

**1 - نهاية منتهية أو غير منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$**

**1** (1 $2,9 < f(x) < 3,1$ معناه $2,9(x+1) < 3x-2 < 3,1(x+1)$ لأن $x+1>0$

و منه $2,9(x+1)+2 < 3x < 3,1(x+1)+2$ و منه $2,9x+4,9 < 3x < 3,1x+5,1$

و منه $(3x-3{,}1x-5{,}1<0)$ و $(2{,}9x+4{,}9-3x<0)$

و منه $(-0{,}1x<5{,}1)$ و $(-0{,}1x<-4{,}9)$ و منه $\left(x>\dfrac{5{,}1}{-0{,}1}\right)$ و $\left(x>\dfrac{4{,}9}{0{,}1}\right)$ إذن $A=49$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$

3) $f(x)-3=\dfrac{3x-2}{x+1}-3=\dfrac{-5}{x+1}$

$f(x)-3<0$ و منه $C_f$ أسفل $\Delta$.

**11** نحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-y\right]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right]$ ثم لدراسة الوضعية ندرس إشارة $f(x)-y$

ملاحظة: نفس الطريقة مع التمارين 8 ، 9 و 10.

## 2 - نهاية منتهية أو غير منتهية عند عدد حقيقي

**13** $\lim\limits_{x\to4} f(x)=3$ ،

$2{,}95\le f(x)\le3{,}05$ يكافئ $2{,}95\le\dfrac{x+2}{x-2}\le3{,}05$ و منه $2{,}95(x-2)-2\le x\le3{,}05(x-2)-2$

أي $\left(x\ge\dfrac{8{,}1}{2{,}05}\right)$ و $\left(x\le\dfrac{7{,}9}{1{,}95}\right)$ ، إذن $3{,}951219512...\le x\le4{,}051282051...$

يمكن أخذ $I=\left]3{,}95;4{,}05\right[$

**14** $\lim\limits_{x\to2} f(x)=+\infty$ ، $f(x)>10^3$ معناه $3x+4>10^3(x-2)^2$ و منه $1000x^2-4003x+3996<0$

و منه $\dfrac{4003+\sqrt{40009}}{2000}<x<\dfrac{4003-\sqrt{40009}}{2000}$ و منه $1{,}901488751<x<2{,}101511249$ .

يمكن أخذ $a=0{,}1$

## 3 - تتمات على النهايات

**18**

| النهاية | عند $-\infty$ | عند $+\infty$ |
|---|---|---|
| أ) | $-\infty$ | $+\infty$ |
| ب) | $-\infty$ | $-\infty$ |
| ج) | $+\infty$ | $-\infty$ |

**19** أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=-\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}} f(x)=+\infty$

ج) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=4$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=4$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to3\\<}} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to3\\>}} f(x)=+\infty$

**20** أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\to2} f(x)=+\infty$

ج) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to0} f(x)=+\infty$.

**21** أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$

ب) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=3$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$ ، $\lim_{x\to-1} f(x)=-\infty$

ج) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to3^-} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to3^+} f(x)=-\infty$

**22** أ) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، $\lim_{x\to1^-} f(x)=-\infty$ ،

$\lim_{x\to1^+} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to4^-} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to4^+} f(x)=-\infty$

ب) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to-1^-} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to3^-} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to3^+} f(x)=+\infty$

ج) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to-2} f(x)=+\infty$ .

**26** أ) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب) من أجل $x>0$ لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{3-\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{3}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$ ،

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{\frac{3}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{1}{3}$$

**28** أ) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-x+1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=0$$

ب) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x+1}-x=+\infty$ لأن $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x+1}=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}-x=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2-x+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=-\frac{1}{2}$$

**29** **الحالة(1):** $D=\mathbb{R}-\{0;2\}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، $\lim_{x\to0^-} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to2^-} f(x)=-\infty$ ،

$\lim_{x\to2^+} f(x)=+\infty$

**الحالة(2):** $D=\mathbb{R}-\{0\}$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

**الحالة(3):** $D=\mathbb{R}-\{-1;1\}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$ ،

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$

## 4 ـ نهاية دالة مركبة – النهايات بالمقارنة

**30** 1) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}3}\frac{3x+4}{x-3}=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}3}\sqrt{\frac{3x+4}{x-3}}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+x+1=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}=+\infty$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}-2x^3+x-3=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{-2x^3+x-3}=+\infty$

**31** : لدينا: على $]-2;2[$ $4-x^2>0$ و منه $\lim\limits_{x\to-2}(4-x^2)=0^+$ و $\lim\limits_{x\to2}(4-x^2)=0^+$ و $\lim\limits_{X\to0^+}\sqrt{X}=0^+$

إذن $\lim\limits_{x\to-2}\frac{-3}{\sqrt{4-x^2}}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to2}\frac{-3}{\sqrt{4-x^2}}=-\infty$

**32** 1) لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+4}{x^2-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

و $\lim\limits_{X\to0}\cos X=1$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{x+4}{x^2-3}\right)=1$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi x}{2x}=\frac{\pi}{2}$ و $\lim\limits_{X\to\frac{\pi}{2}}\cos X=0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{\pi x-1}{2x}\right)=0$

3) $\lim\limits_{x\to-1}\left(-\frac{\pi}{2}x\right)=\frac{\pi}{2}$ و منه $\lim\limits_{X\to\frac{\pi}{2}}\sin X=1$ ، إذن $\lim\limits_{x\to-1}\sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right)=1$

و $\lim\limits_{x\to-1}\frac{1}{(x+1)^2}=+\infty$ و بالتالي : $\lim\limits_{x\to-1}\sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right)+\frac{1}{(x+1)^2}=+\infty$

4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1$ و منه $\lim\limits_{x\to0}\left(\pi\frac{\sin x}{x}\right)=\pi$ و $\lim\limits_{X\to\pi}\cos X=-1$ ، إذن $\lim\limits_{x\to0}\cos\left(\pi\frac{\sin x}{x}\right)=-1$

**35** لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$ و منه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-3=0$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$

**36** دينا $\lim\limits_{x\to+\infty}-2x^3=-\infty$ و بما أن $f(x)\le-2x^3$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

**37** لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x^4+x\right)=+\infty$ و بما أن $f(x)\ge\frac{1}{2}x^4+x$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

**38** 1) لدينا $-1\le\cos x\le1$ و منه $-2\le2\cos x\le2$ و منه $1\le3+2\cos x\le5$

2) إذا كان : $x\to+\infty$ فإن $x-1\to+\infty$ . $1\le3+2\cos x\le5$ تكافئ $\frac{1}{5}\le\frac{1}{3+2\cos x}\le1$

و منه $\frac{x-1}{5}\le\frac{x-1}{3+2\cos x}\le x-1$ . لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{5}=\lim\limits_{x\to+\infty}x-1=+\infty$ و بالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{3+2\cos x}=+\infty$

**39** (1 $x^2-3\sin x-(x^2-3)=-3\sin x+3=3(1-\sin x)$ بما أن $-1\le \sin x\le 1$ فإن $-1\le -\sin x\le 1$ و منه $0\le 1-\sin x\le 2$ ، إذن $x^2-3\sin x-(x^2-3)\ge 0$

و بالتالي : $x^2-3\sin x\ge x^2-3$

(2 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-3=+\infty$ و $x^2-3\sin x\ge x^2-3$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-3\sin x=+\infty$

**40** • عند $+\infty$ $(x>0)$ : $-1\le \sin x\le 1$ و منه $-2x\le 2x\sin x\le 2x$ و منه

$x^2-2x\le x^2+2x\sin x\le x^2+2x$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+2x=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-2x=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ .

• عند $-\infty$ $(x<0)$ : $-1\le \sin x\le 1$ و منه $2x\le 2x\sin x\le -2x$ و منه

$x^2+2x\le x^2+2x\sin x\le x^2-2x$

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+2x=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-2x=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ .

**41** (1 لدينا : : $-1\le \sin x\le 1$ و منه $x-1\le x+\sin x\le x+1$ و منه $\dfrac{x-1}{2x+1}\le \dfrac{x+\sin x}{2x+1}\le \dfrac{x+1}{2x+1}$

(2 بما أن : $\dfrac{1}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{2x+1}$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}$

## 5 - الاستمرارية

**43** لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=x^2-2x+1 \;; & x\le 2\\ f(x)=x^2+x-5 \;; & x>2\end{cases}$

(1 $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} x^2-2x+1=1=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} f(x)$ و $f(2)=1$ .إذن الدالة $f$ مستمرة عند 2 على اليسار

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} x^2+x-5=1=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} f(x)$ و $f(2)=1$ .إذن الدالة $f$ مستمرة عند 2 على اليمين

و منه الدالة $f$ مستمرة عند 2 .

(2 نعم الدالة $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها مستمرة على $]-\infty;2]$ (كثير حدود) و على $]2;+\infty[$ (كثير حدود) و مستمرة عند 2.

## 6 - مبرهنة القيم المتوسطة

**52** (1 $f(1)=\dfrac{3}{4}$ ، $f(0)=-\dfrac{1}{4}$ ، $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{8}$ ، $f(-1)=-\dfrac{5}{4}$

(2 نطبق مبرهنة القيم المتوسطة على المجالات $\left[-1;\dfrac{1}{2}\right]$ ، $\left[-\dfrac{1}{2};0\right]$ و $[0;1]$ .

**56** • بما أن $f$ مستمرة و رتيبة تماما على $]-3;0]$ و تأخذ قيمها في $]-2;+\infty[$ و بما أن $0\in]-2;+\infty[$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا في المجال $]-3;0]$

• بما أن $f$ مستمرة و رتيبة تماما على $[0;2]$ و تأخذ قيمها في $[-2;4]$ و بما أن $0\in[-2;4]$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا في المجال $[0;2]$

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين $x_0$ و $x_1$ حيث $-3<x_0<0$ و $0<x_1<2$

## 7 - الدوال المستمرة و الرتيبة تماما

**64** 1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

2) الدالة $f$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، و من أجل كل عدد حقيقي x $f'(x)=-3x^2+6x$

أ) $f'(x)=0$ معناه $(x=0)$أو $(x=2)$ ، $f'(x)<0$ معناه $(x<0)$أو $(x>2)$ ،

$f'(x)>0$ معناه $(0<x<2)$

ب)

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

3) نطبق مبرهنة القيم المتوسطة على كل مجال من المجالات $[-1;0]$ ، $[0;1]$ ، $[2;3]$

**67** نعتبر الدالة $h:x\mapsto f(x)-g(x)$ و نطبق مبرهنة القيم المتوسطة على المجال $\left[-\frac{7}{8};-\frac{3}{4}\right]$

## تمارين للتعمق

### 2 ـ نهاية منتهية أو غير منتهية عند عدد حقيقي

**71** $a=2$ ، $b=3$ ، $c=-1$ و $d=-1$

**72** 1) $a=1$ ، $b=1$ ، $c=3$ و $d=-1$

2) $f(x)=x+1+\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=0$$

إذن المنحني $(C)$ الممثل للدالة $f$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $\Delta$عند $-\infty$ و عند $+\infty$ معادلته $y=x+1$

3) ندرس إشارة $f(x)-(x+1)$ : $f(x)-(x+1)=\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{3x+2}{(x+1)^2}$

$f(x)-(x+1)=0$ تكافئ $x=-\dfrac{2}{3}$ ، $f(x)-(x+1)<0$ تكافئ $x<-\dfrac{2}{3}$ ،

$f(x)-(x+1)>0$ تكافئ $x>-\dfrac{2}{3}$

$(C)$ أعلى $\Delta$ في المجال $\left]-\frac{2}{3};+\infty\right[$ و $(C)$أسفل $\Delta$ في المجالين $]-\infty;-1[$ و $\left]-1;-\frac{2}{3}\right[$ .

**73** 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=0$

2) $\Delta: y=x+2$ مستقيم مقارب مائل للمنحني $(C)$ عند $+\infty$.

3) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

ب) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x+5}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+4x+5}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x+5}{\sqrt{x^2+4x+5}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)}=-2$$

ج) نستنتج أن المنحني $(C)$ يقبل مستقيما مقاربا $\Delta'$ عند $-\infty$ معادلته $y=-x-2$ .

**74** 1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

2) $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=0$ ، $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{3}{2}$

التخمين: $(C_f)$ يقترب من المستقيم $\Delta$ الذي معادلته $y=x+\frac{1}{2}$ عند $+\infty$ و لكن $(C_g)$ لا يقترب من المستقيم عند $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{3}{2}$ معناه $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}\right]=0$ أي $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-(x+2)\right]=0$

نستنتج أن المستقيم $\Delta'$ الذي معادلته $y=x+2$ مقارب للمنحني $(C_g)$ عند $+\infty$ .

## 3 - تتمات على النهايات

**82** 1) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x-3}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{-3;1\}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

$\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}1} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}1}\frac{x+1}{x^2+2x-3}=+\infty$ لأن $\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}1} x+1=2$ و $\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}1} x^2+2x-3=0^+$

و بالمثل : $\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}1} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}-3} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}-3} f(x)=+\infty$

6) $f(x)=\frac{(x+2)^3-8}{x}$ ، $D_f=\mathbb{R}^*$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+2)^3-8}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ و كذلك $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{(x+2)^3-8}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(x+2-2)\left((x+2)^2+2(x+2)+4\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\left(x^2+6x+12\right)}{x}=\lim_{x\to0}\left(x^2+6x+12\right)=12$$

**88** من اجل كل عدد حقيقي $x$ نضع: $g(x)=\sin 3x$ و $h(x)=2\cos x-1$ و $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$

$$f(x)=\frac{\sin 3x}{2\cos x-1}=\frac{\dfrac{\sin 3x-0}{x-\frac{\pi}{3}}}{\dfrac{2\cos x-1}{x-\frac{\pi}{3}}}=\frac{\dfrac{\sin 3x-\sin 3\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}}{\dfrac{2\cos x-2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}}=\frac{\dfrac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}}{\dfrac{h(x)-h\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}}$$

إذن $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x)=\dfrac{g'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h'\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ لأن الدالتان $g$ و $h$ قابلتان للاشتقاق عند $\frac{\pi}{3}$ و $h'\left(\frac{\pi}{3}\right)\neq 0$

لدينا : $g'(x)=3\cos 3x$ و $h'(x)=-2\sin x$

بما أن $g'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-3$ و $h'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$ فإن $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x)=\sqrt{3}$

**90** 1) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x=0$ و $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-\cos x}=0$ و منه لدينا حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ .

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}\times\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\sqrt{1+\cos x}}{|\sin x|}$$

إذا كان $x>0$ فإن : $l_1=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin 2x\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0^+}2\times\dfrac{\frac{\sin 2x}{2x}\sqrt{1+\cos x}}{\frac{\sin x}{x}}=2\sqrt{2}$

2) $l_2=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan x$ ، حالة عدم تعيين من الشكل $0\times\infty$ .

نضع: $X=x-\frac{\pi}{2}$ و منه $x=X+\frac{\pi}{2}$ . إذا كان $x\to\frac{\pi}{2}$ فإن $X\to 0$

$$l_2=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan x=\lim_{X\to 0}(\pi-\pi-2X)\tan\left(\frac{\pi}{2}+X\right)=\lim_{X\to 0}\frac{-2X}{-\tan X}=\lim_{X\to 0}\frac{2}{\frac{\tan X}{X}}=2$$

## 4 - نهاية دالة مركبة – النهايات بالمقارنة

**101** 1) أولا نعين مجموعة التعريف:

$D_f=\mathbb{R}$ لأن من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $x-\sqrt{x^2+1}<0$

لدينا: $x-\sqrt{x^2+1}=-\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+2x=\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}+2x=\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}+2x$

و لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $x-\sqrt{x^2+1}<0$ ، إذن $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}+2x<0$ أي $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}<-2x$

2) لدينا $-1\leq\sin x\leq 1$ و منه $0\leq 1+\sin x\leq 2$

و منه $0\leq x(1+\sin x)\leq 2x$ لأن : $x>0$

من : $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}<-2x$ ينتج $\dfrac{x(1+\sin x)}{x-\sqrt{x^2+1}}<-2x\left[x(1+\sin x)\right]$ أي $\dfrac{x(1+\sin x)}{x-\sqrt{x^2+1}}<-4x^2$ أي

$f(x)<-4x^2$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}-4x^2=-\infty$ . نستنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ .

# الباب الثاني

# الاشتقاقية

# الأنشطة

**النشاط الأول**
**تصحيح:** /
**الهدف:** تذكير حول المشتقات.
**توجيهات:** يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " الاشتقاقية ". و يتم ضمن أفواج.
**الحل:** يكفي تعيين معامل التوجيه ثم تطبيق المبرهنات حول المشتقات.
**النشاط الثاني**
**تصحيح:** /
**الهدف:** تعريف الدالة " ظل ".
**توجيهات:** يقدم النشاط كمدخل للفقرة " دراسة دالة مثلثية " .
**الحل:** بسيط
**النشاط الثالث**
**تصحيح:** /
**الهدف:** مقاربة مشتقة الدالة المركبة.
**توجيهات:** يقدم النشاط كمدخل للفقرة " اشتقاق دالة مركبة " و يتم ضمن أفواج مع استغلال جهاز الداتتاشو.
**الحل:** بسيط.

# الأعمال الموجهة

**المقارنة بين دوال و دراسة الأوضاع النسبية لمنحنياتها**
**تصحيح:** /
**الهدف:** توظيف دراسة اتجاه تغير دالة.
**توجيهات:** يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.
**الحل:** بسيط

**دراسة دالة صماء**
**تصحيح:** /
**الهدف:** توظيف اتجاه تغير دالة.
**توجيهات:** يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.
**الحل:** بسيط

**تقريب دالة بواسطة مجدول أو حاسبة**
**تصحيح:** /
**الهدف:** توظيف طريقة أولر.
**توجيهات:** يقدم النشاط باستعمال جهاز الداتاشو أو باستعمال حاسبة بيانية.
**الحل:** بسيط

# التمارين

## تمارين تطبيقية.

### 1 - الاشتقاقية

**2** $f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=|x|$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \dfrac{-x}{x} = -1$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{x}{x} = 1$ إذن $f$ لا تقبل الاشتقاق عند $0$.

**6** المنحني يقبل مماسا عند $A$ إذن الدالة تقبل الاشتقاق عند $-2$ ومعامل توجيه المماس $T$ هو $f'(-2)=\dfrac{3}{2}$ ولدينا $f(-2)=3$ وبالتالي معادلة المماس $T$ هي $y=\dfrac{3}{2}(x+2)+3$ .

### 2 - المشتقات والعمليات عليها

**12** في كل حالة من الحالات المقترحة الدالة $f$ تعتبر كثير حدود وبالتالي هي تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ .

أ - $f'(x)=5x^4+4x^3-9x^2+2x+4$.

ب - $f'(x)=\dfrac{6x^2+2x-4}{4}$ .

جـ - $f'(x)=6mx^2+6m^3x-m^2$.

د - $f(m)=2x^3+9m^2x^2-2mx+1$ .

**14** أ - $f(x)=x+x\cos x$ ؛ $D=\mathbb{R}$ . $f'(x)=1+\cos x-x\sin x$

ب - $f(x)=\sin x\cos x$ ؛ $D=\mathbb{R}$ . $f'(x)=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$.

جـ - $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ ؛ $D=\mathbb{R}^*$ . $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$.

### 3 - اتجاه تغيّر دالة

**25** أ - $f(x)=2x^4-27x+7$ ؛ $f'(x)=8x^3-27=(2x-3)(4x^2+6x+9)$

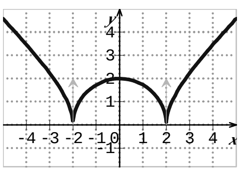
من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $4x^2+6x+9>0$ ومنه إذا كان $x\geq\dfrac{3}{2}$ فإن $f'(x)\geq 0$ ومنه $f$ متزايدة تماما على $\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ ؛ إذا كان $x\leq\dfrac{3}{2}$ فإن $f'(x)\leq 0$ ومنه $f$ متناقصة تماما على $\left]-\infty;\dfrac{3}{2}\right]$ .

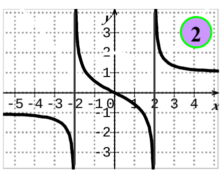
جـ - $f(x)=x+\cos x$ . $f'(x)=1-\sin x$ ، من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $1\geq\sin x$ ومنه $f'(x)\geq 0$ إذن الدالة $f$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

هـ - $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ؛ الدالة $f$ معرفة على $\mathbb{R}_+$ وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ ولدينا $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2\sqrt{x}}{x}$ ومنه $f'(x)>0$ إذن الدالة $f$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+$.

**27** الشكل المقابل هو المنحني $\mathcal{C}_f$ لدالة $f$ قابلة للاشتقاق عند كل قيمة من المجموعة $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ .

المنحني الذي يمثل $f'$ هو





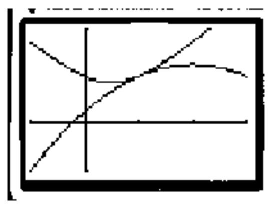
## 4 ـ اشتقاق دالة مركبة

**34** أ ) $f'(x)=3(2x+2)(x^2+2x-3)^2$ .

ب) $g'(x)=4(4x+1)(2x^2+x-1)^3$ .

ج) $h'(t)=5(3t^2-1)(t^3-t+1)^4$ .

د) $t'(u)=-\dfrac{16u}{(u^2+3)^9}$ .



**39** باستعمال حاسبة بيانية مثّلنا المنحنيين الذين معادلتيهما $y=\sqrt{x^2-x+1}$ و $y=-\frac{1}{4}x^2+x+\frac{1}{4}$ .

1) يبدو أن للمنحنيين مماس مشترك عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

2) أ ـ الدالة $g$ كثير حدود إذن هي قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

الدالة $u:x\mapsto x^2-x+1$ تقبل الاشتقاق وموجبة تماما على $\mathbb{R}$ إذن الدالة $f:x\mapsto\sqrt{u}$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

ب ـ $f(1)=1$ ، $g(1)=1$ ، $f'(1)=\frac{1}{2}$ و $g'(1)=\frac{1}{2}$.

ج ـ معادلة المماس لمنحني الدالة $f$ هي : $y=\frac{1}{2}(x-1)+1$ ونجد نفس المعادلة لمماس منحني الدالة $g$.

## 5 ـ التقريب التآلفي

**41** برّر التقريب التآلفي المحلي عند 0 في كل الحالة من الحالات التالية :

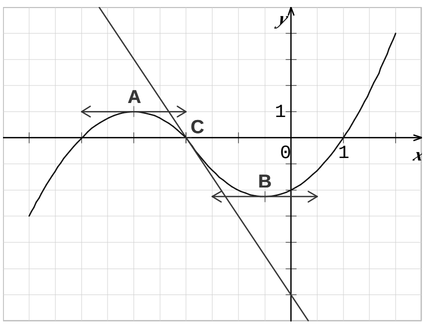
أ ) $(1+x)^3\approx 1+3x$. لدينا $(1+x)^3=x^3+3x^2+3x+1$ وعندما يقترب $x$ من 0 فيكون $x^3$ و $3x^2$ قيمتين مهملتين.

يمكن اعتبار معادلة مماس منحني الدالة $x\mapsto(1+x)^3$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 هي $y=1+3x$.

**تمارين للتّعمّق.**

## 1 ـ الاشتقاقية

**46**



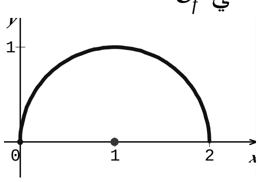

المنحني البياني $\mathcal{C}_f$ التالي هو لدالة $f$ قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها

.1 $D_f=[-5;2]$.

.2 $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=0$ ، $f'(-3)=0$ و $f'(-2)=\dfrac{0-(-4)}{-2-0}=-2$.

.4 عند $A$ ، $y=1$ ؛ عند $B$ ، $y=-\frac{9}{4}$ وعند $C$ ، $y=-2(x+2)$.

.5 لا توجد مماسات أخرى للمنحني $\mathcal{C}_f$ موازية لمماسه عند النقطة $C$ لأنها هي نقطة انعطاف للمنحني $\mathcal{C}_f$.




**53** $f$ الدالة المعرّفة على المجال $[0;2]$، تمثيلها البياني $\mathcal{C}$ هو عبارة عن نصف دائرة كما هو مبيّن في الشكل .

1) المماس منطبق على محور التراتيب.

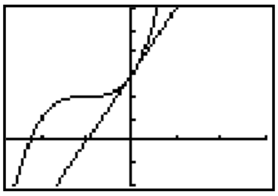
2) نضع $\Omega(1;0)$ ؛ $M(x;y)$ تنتمي إلى $\mathcal{C}$ معناه $\Omega M=1$ و $y\geq 0$ أي $(x-1)^2+y^2=1$ و $y\geq 0$ وهذا يعني $y=\sqrt{1-(x-1)^2}$ أي $f(x)=\sqrt{1-(x-1)^2}$

3) نجد بالحساب $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ غير منتهية .

## 2 ـ المشتقات والعمليات عليها

**58** $f$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^3+3x^2+3x+3$

على شاشة الحاسبة البيانية نرسم المنحني $\mathcal{C}$ الممثل للدالة $f$ والمماس $T$ عند النقطة $A$ التي فاصلتها 0.



1. $y=3x+3$ .

2. يبدو أنه إذا كان $x\in\left[-\frac{5}{2};+\infty\right[$ فإن المنحني يقع فوق المماس .

3.تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $f(x)-(3x+3)=x^2(x+3)$ .

4. إذا كان $x\in[-3;+\infty[$ فإن $f(x)-(3x+3)\geq 0$ ويكون المنحني فوق المماس ، وإذا كان $x\in]-\infty;-3]$ فإن $f(x)-(3x+3)\leq 0$ ويكون المنحني تحت المماس.

# الباب الثالث

## الدوال الأسية و اللوغاريتمية

# الأنشطة

**النشاط الأول**

**تصحيح:** /

**الهدف:** تعريف الدالة الأسية.

**توجيهات:** يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " الدالة الأسية ". و يتم ضمن أفواج مع استغلال جهاز الداتاشو.

**الحل:** يكفي إتباع مختلف المراحل لبلوغ النتائج المتوخاة .

**النشاط الثاني**

**تصحيح:** /

**الهدف:** تعريف الدالة اللوغاريتمية النيبيرية.

**توجيهات:** يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الدالة اللوغاريتمية "

**الحل:** بسيط

# الأعمال الموجهة

**الدوال** $x \mapsto e^{-\lambda x}$

**تصحيح:** /

**الهدف:** توظيف الدالة الأسية.

**توجيهات:** يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

**الحل:** بسيط.

**الدوال** $x \mapsto e^{-\lambda x^2}$

**تصحيح:** /

**الهدف:** توظيف الدالة الأسية و مقاربة منحنيات غوص.

**توجيهات:** يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

**الحل:** بسيط

**المعادلة التفاضلية من الشكل** $y' = ay + b$

**تصحيح:** /

**الهدف:** حل معادلات تفاضلية.

**توجيهات:** يقدم النشاط ضمن أفواج أو كواجب منزلي.

**الحل:** بسيط

**دالتا تجب و جيب الزائديتان**

**تصحيح:** /

**الهدف:** توظيف الدالة الأسية.

**توجيهات:** يقدم النشاط ضمن أفواج أو كواجب منزلي.

**الحل:** بسيط

**التمثيل البياني لدوال مرفقة بالدالة اللوغاريتمية النيبيرية**

**تصحيح:** /

**الهدف:** توظيف الدالة الأسية.

**توجيهات:** يقدم النشاط ضمن أفواج أو كواجب منزلي.

**الحل:** بسيط

# التمارين

## تمارين تطبيقية

### 1 - الدالة الأسية

**3** (1 $\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=\dfrac{e^{2x}\left(1-e^{-2x}\right)}{e^{2x}\left(1+e^{-2x}\right)}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

(2 $e^{-x}-e^{-2x}=\dfrac{1}{e^{x}}-\dfrac{1}{e^{2x}}=\dfrac{e^{x}-1}{e^{2x}}$

(3 تصويب: $(e^{x}+e^{-x})^2=(e^{x})^2+2e^{x}e^{-x}+(e^{-x})^2$

$$(e^{x}+e^{-x})^2=e^{2x}+e^{-2x}+2$$

$$(e^{x}+e^{-x})^2=e^{2x}+\frac{1}{e^{2x}}+2=\frac{e^{4x}+1}{e^{2x}}+2$$

(4 $\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\dfrac{e^{x}\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{e^{x}\left(e^{x}+e^{-x}\right)}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

### 2 - الدوال الأسية $x \mapsto e^{kx}$

**15** تصويب: $f(x+y)=f(x)\times f(y)$

1) أ) إذا كان $x=y=0$ فإن: $f(0)=f(0)\times f(0)$ ومنه $f(0)-\left[f(0)\right]^2=0$

ومنه $f(0)\left[1-f(0)\right]=0$ ومنه $f(0)=1$ لأن $f$ غير معدومة.

ب) من أجل كل عدد حقيقي $x$: $f(x)\times f(-x)=f(x-x)$

ومنه $f(x)\times f(-x)=f(0)$ أي $f(x)\times f(-x)=1$

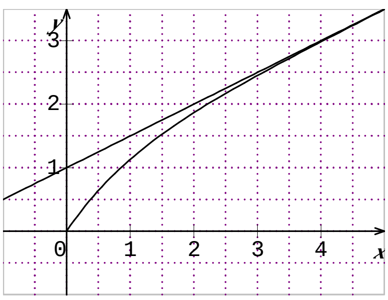
2. أ– من أجل كل عدد حقيقي $x$، $f\left(\dfrac{x}{2}\right)\times f\left(\dfrac{x}{2}\right)=f\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}\right)=f(x)$

ب) الدالة $f$ موجبة تماما على $\mathbb{R}$.

### 3 - دراسة الدالة الأسية

$f$ دالة معرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{1}{2}x+1-e^{-x}$$




1.أ) $f'(x)=\dfrac{1}{2}+e^{-x}$ الدالة $f$ متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2.أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-e^{-x}\right)=0$

معادلة المستقيم المقارب $D$ هي: $y=\dfrac{1}{2}x+1$.

ب) المنحني $(C)$ أسفل المستقيم $D$.

3. الرسم (انظر الشكل)

**51** .1 $g(x)-f(x)=e^{-x}(1-\sin x)$

$\sin x=1$ على $[0;\pi]$ معناه $x=\dfrac{\pi}{2}$ .إذن المنحنيان يشتركان في النقطة $A\left(\dfrac{\pi}{2};e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$

.2 $f'(x)=e^{-x}(-\sin x+\cos x)$ و $g'(x)=e^{-x}$

$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-e^{-\frac{\pi}{2}}$ إذن المنحنيان يقبلان في النقطة $A$ مماسا مشتركا.

## 4 - الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

**61** $P(x)=-2x^3+3x^2+11x-6$

1) $P(x)=(2x-1)(x+2)(3-x)$

2) $P(x)=0$ معناه أو $(2x-1)$ أو $(x=-2)$ أو $(x=3)$

3) $x\in\left\{e^{\frac{1}{2}};e^{-2};e^{3}\right\}$

4) $x\in\left\{\ln\dfrac{1}{2};\ln 3\right\}$

## 5 - الخواص الجبرية

**73** 2) $\begin{cases} x^2+2y=16 \\ \ln\dfrac{x}{y}=-\ln 3 \end{cases}$ مجوعة الحلول هي $S=\{(-8;-24),(2;6)\}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=169 \\ \ln x+\ln y=\ln 60 \end{cases}$ مجوعة الحلول هي $S=\{(5;12),(12;5)\}$

**74** 1) $2t^2-5t+2=0$ معناه $t\in\left\{\dfrac{1}{2};2\right\}$

2) مجموعة حلول الجملة هي: $S=\{(-\ln 2;\ln 2),(\ln 2;-\ln 2)\}$

## 6 - دراسة الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

**91** $f(x)=3\ln(2+x)+x^2-3x$

$$f'(x)=\frac{3}{x+2}+2x-3=\frac{2x^2+x-3}{x+2}$$

$f'(x)=0$ تكافئ $2x^2+x-3=0$

$f'(x)=0$ تكافئ $(x=1)$ أو $\left(x=-\dfrac{3}{2}\right)$

إذن المنحني $C$ الممثل للدالة $f$ يقبل مماسين موازيين لمحور الفواصل عند النقطتين التين فاصلتاهما 1 و $\dfrac{3}{2}$

## 7- دالة اللوغاريتم العشري

**98** 1. $\log\left(2^{1234}\right)=1234\log 2$ . $E\left(1234\log 2\right)=371$ .

2. من $E\left(\log n\right)=371$ نستنتج أن: $371\leq \log n<372$

ومنه $\log 10^{371}\leq \log n<\log 10^{372}$ و منه $10^{371}\leq n<10^{372}$

3. الكتابة العشرية للعدد $n$ تتكون من 372 رقما.

## 8- المعادلات التفاضلية

**102** 1) $f(x)=\lambda e^{3x}$ ، 2) $f(x)=\lambda e^{-2x}$

3) $f(x)=\lambda e^{-\frac{5}{2}x}$ ، 4) $f(x)=\lambda e^{8x}$

**103** 1) $f(x)=\lambda e^{-\frac{1}{2}x}$

2) الحل الخاص $f$ الذي يحقق $f\left(\ln 4\right)=1$ هو

$$f(x)=2e^{-\frac{1}{2}x}$$

### تمارين للتعمق

**108** 1) تصويب: المستقيم الذي معادلته $y=1$ مستقيم مقارب للمنحني $(C)$ عند $-\infty$.

$\left(a,b,c\right)=\left(2,-3,1\right)$

2) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$. المنحني $(C)$ يقبل المستقيم الذي معادلته $y=1$ كمقارب عند $-\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
- $f'(x)=e^{x}\left(4e^{x}-3\right)$

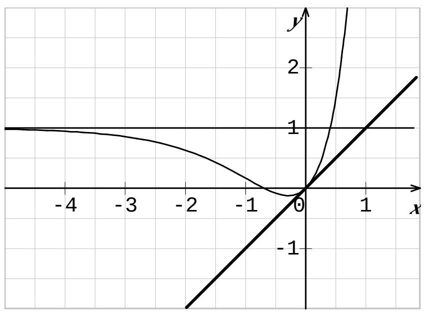
| $x$ | $-\infty$ | | $\ln\frac{3}{4}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $1$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{8}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

ب) المنحني $(C)$ يقطع محور الفواصل في النقطتين اللتين فاصلتاهما 0 و $-\ln 2$.

- معادلة المماس للمنحني $(C)$ عند النقطة التي فاصلتها 0 هي $y=x$ .

جـ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

د) الرسم



**116** 1) أ) $f(x)-(x-1)=x-\frac{e^x-1}{e^x+1}-x+1=\frac{2}{e^x+1}$

$$f(x)-(x+1)=-\frac{e^x-1}{e^x+1}-1=\frac{-2e^x}{e^x+1}$$

ب) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

جـ) $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=0$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(x+1)=0$

إذن المستقيمان $\Delta_1$ و $\Delta_2$ اللذين معادلتاهما على مقاربان لــ $(C)$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

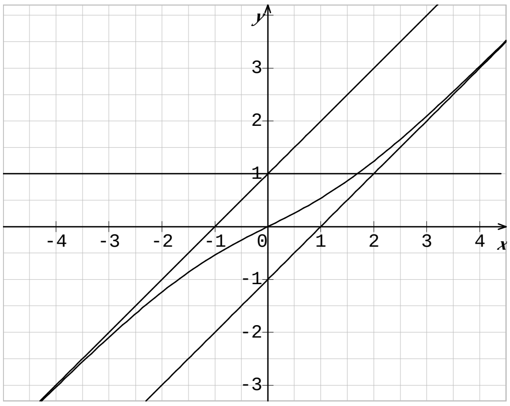
د) بجوار $+\infty$ $(C)$ أعلى $\Delta_2$، و بجوار $-\infty$ $(C)$ أسفل $\Delta_1$.

2) أ) $f(-x)=-x-\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=-x+\frac{1-e^x}{1+e^x}=-f(x)$

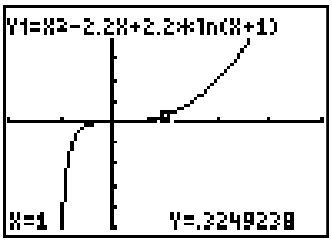
ب) $f'(x)=1-\frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{2e^x+1}{\left(e^x+1\right)^2}$

| $x$ | $0$ $\alpha$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f$ | $0$ ↗ $1$ ↗ $+\infty$ |

3) الرسم




**117** 1)




2.أ) الدالة $f$ متزايدة.

ب) الدالة $f$ تنعدم عند $x=0$.

3.أ) من أجل $x>-1$ : $f'(x)=2x-2,2+\frac{2,2}{x+1}=\frac{2x^2-0,2x}{x+1}$

إشارة $f'(x)$ هي من نفس لإشارة $x\left(2x-0,2\right)$

$f'(x)>0$ معناه $x\in ]-1;0[\cup]0,1;+\infty[$ ، $f'(x)<0$ معناه $x\in ]0;0,1[$ ، $f'(x)=0$ معناه $x\in\{0;0,1\}$

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $0,1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $\approx -0,0003$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

ب) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

جـ) لدينا $f(0)=0$ و على المجال $]0,1;+\infty[$ الدالة $f$ مستمرة و متزايدة و تأخذ قيمها في $[f(0,1);+\infty[$

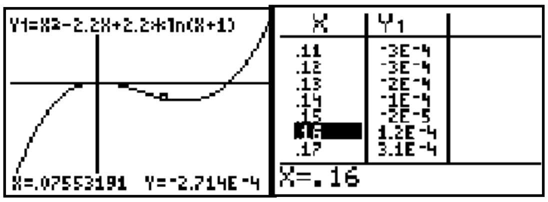
و $f(0,1)<0$. إذن يوجد عدد حقيقي وحيد $x_0$ حيث $f(x_0)=0$

خلاصة: المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين $0$ و $x_0$.

د) نتائج دراسة الدالة لا تتطابق مع التخمين.

4.أ) يمكن أخذ $-0,0018\le y\le 0,00111$

ب) $f(0,15)<0$ و $f(0,16)>0$ ومنه $0,15<\alpha<0,16$. قيمة مقربة بالزيادة إلى $10^{-2}$ للعدد $\alpha$ هي $0,16$




**121** 1) أ) من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $-1\le \cos 4x\le 1$ و $e^{-x}>0$ ومنه .

$-e^{-x}\le f(x)\le e^{-x}$

ب) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$

2) النقط المشتركة للمنحنيين $\Gamma$ و $C$ هي النقط $M_k\left(k\frac{\pi}{2};e^{-k\frac{\pi}{2}}\right)$

3) أ) $u_{n+1}=e^{-n\frac{\pi}{2}}\times e^{-\frac{\pi}{2}}=e^{-\frac{\pi}{2}}u_n$ .المتتالية $(u_n)$ هندسية أساسها $e^{-\frac{\pi}{2}}$

ب)أساس المتتالية $(u_n)$ $0<e^{-\frac{\pi}{2}}<1$ و $u_0=1$. إذن المتتالية $(u_n)$ موجبة و متزايدة و تتقارب نحو $0$.

4) أ) من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $[0;+\infty[$:

تصويب: $f'(x)=-e^{-x}\left[\cos(4x)+4\sin(4x)\right]$

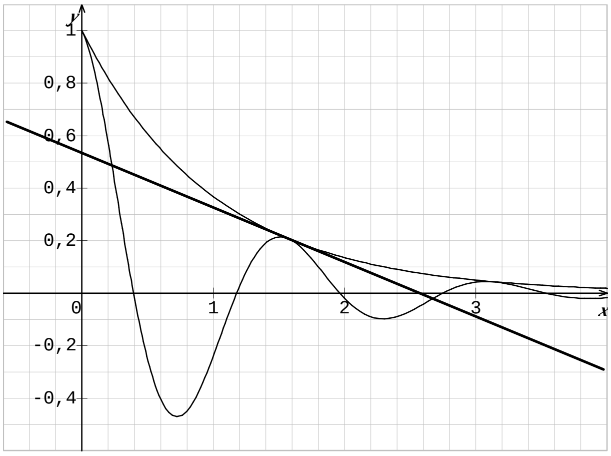
ب) $g'(x)=-e^{-x}$. إذا كان $x=k\frac{\pi}{2}$ فإن $\cos 4x=1$ و $\sin 4x=0$

$f'\left(k\frac{\pi}{2}\right)=g'\left(k\frac{\pi}{2}\right)=-e^{-k\frac{\pi}{2}}$

إذن المنحنيين $\Gamma$ و $C$ لهما نفس المماس عند كل نقطة من نقط تقاطعهما.

5) لدينا: $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-e^{-\frac{\pi}{2}}$ . قيمة مقربة إلى $10^{-1}$ لمعامل توجيه المماس $T$ للمنحني $\Gamma$ عند النقطة التي فاصلتها

$\frac{\pi}{2}$ هي $-0,2$ .




## مسائل

**123** 1) المجموعة $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة للصفر، $f(-x)=\frac{1}{e^{-x}+e^{x}}=f(x)$ إذن الدالة $f$ زوجية

2) الدالة $x\mapsto e^{x}$ متزايدة على $\mathbb{R}$. من أجل كل عدد حقيقي موجب x : $-x\le x$ ومنه $e^{-x}\le e^{x}$ .

3) أ) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

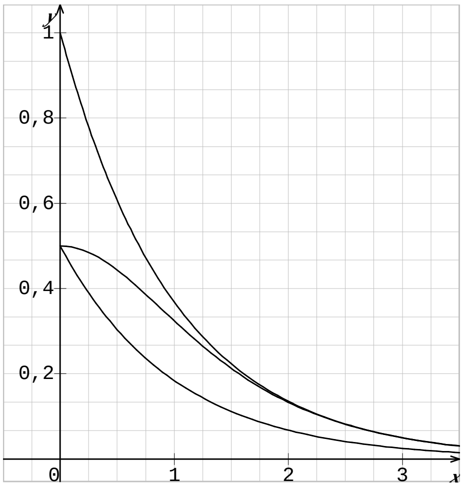
ب) $f'(x)=-\frac{e^{x}-e^{-x}}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}}$. من أجل كل $x\ge 0$ : $e^{x}\ge e^{-x}$ و منه $f'(x)<0$

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ $-$ | |
| $f$ | $\frac{1}{2}$ ↘ | $0$ |

4) أ) من أجل كل $x\ge 0$ : $0<e^{-x}\le e^{x}$ ومنه $0<e^{x}<e^{-x}+e^{x}\le 2e^{x}$ ومنه $\frac{1}{2e^{x}}\le\frac{1}{e^{-x}+e^{x}}\le\frac{1}{e^{x}}$

إذن :من أجل كل عدد حقيقي موجب $x$ : $h(x)\le f(x)\le g(x)$ .

ب) نستنتج أنه على $\mathbb{R}^{+}$ ، $\Gamma$ يكون بين $\Gamma_1$ و $\Gamma_2$ .



# الباب الرابع

## التزايد المقارن

# الأنشطة

**النشاط الأول**
**تصحيح:** /
**الهدف:** تعريف قوى عدد حقيقي موجب.
**توجيهات:** يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " قوى عدد حقيقي موجب ".
**الحل:** بسيط
**النشاط الثاني**
**تصحيح:** /
**الهدف:** مقاربة مفهوم الجذر النوني.
**توجيهات:** يقدم النشاط كمدخل للفقرة " دراسة الدوال $x \longmapsto a^x$ و $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ "
**الحل:** بسيط
**النشاط الثالث**
**تصحيح:** /
**الهدف:** مقارنة كل من $\ln x$ و $e^x$ مع $x^n$ "
**توجيهات:** يقدم النشاط كمدخل للفقرة " التزايد المقارن " و يتم ضمن أفواج.
**الحل:** بسيط.

# الأعمال الموجهة

**دراسة دالة لوغاريتمية**
**تصحيح:** /
**الهدف:** توظيف دالة اللوغاريتم النيبيري و التزايد المقارن.
**توجيهات:** يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.
**الحل:** بسيط
**مسألة استمثال**
**تصحيح:** /
**الهدف:** توظيف دالة اللوغاريتم النيبيري و التزايد المقارن.
**توجيهات:** يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.
**الحل:** بسيط
**مقارنة الأعداد $n^{n+1}$ و $(n+1)^n$**
**تصحيح:** /
**الهدف:** توظيف دالة اللوغاريتم النيبيري و التزايد المقارن.
**توجيهات:** يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.
**الدوال $x \longmapsto x^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$**
**تصحيح:** /
**الهدف:** توظيف الدوال الأسية و التزايد المقارن.
**توجيهات:** يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.
**الحل:** بسيط
**نموذج ديموغرافي**

**تصحيح:** /
**الهدف:** توظيف قوى عدد حقيقي موجب تماما.
**توجيهات:** يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.
**الحل:** بسيط

**فاتورة الهاتف**
**تصحيح:** /
**الهدف:** توظيف الدلالة الأسية و التزايد المقارن.
**توجيهات:** يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.
**الحل:** بسيط

# التمارين

## تمارين تطبيقية

### 1 - قوى عدد حقيقي موجب تماما

**4**

$$a = 9^{\frac{3}{2}} \times 27^{\frac{1}{4}} = \left(3^2\right)^{\frac{3}{2}} \times \left(3^3\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$a = 3^3 \times 3^{\frac{3}{4}} = 3^{3+\frac{3}{4}} = 3^{\frac{15}{4}}$$

$$b = 3^{-\frac{5}{4}} \times 81^{\frac{5}{3}} = 3^{\frac{65}{12}}$$

$$c = \left(3^{-4}\right)^{\frac{1}{3}} \times 27^{-\frac{1}{3}} = 3^{-\frac{7}{3}}$$

**7**

1) $12^x = 3$ تكافئ $e^{\ln 12^x} = e^{\ln 3}$

تكافئ $e^{x\ln 12} = e^{\ln 3}$

تكافئ $x\ln 12 = \ln 3$

تكافئ $x = \dfrac{\ln 3}{\ln 12}$

2) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x = \dfrac{1}{8}$ تكافئ $x = \dfrac{\ln 8}{\ln 4}$

3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 3$ تكافئ $x = -\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$

4) $5^{x-1} = 2^x$ تكافئ $x = \dfrac{\ln 5}{\ln 5 - \ln 2}$

5) $3^x = 4^{2x+1}$ تكافئ $x = \dfrac{\ln 4}{\ln \frac{3}{16}}$

6) $5^{1-3x} = \dfrac{1}{125}$ تكافئ $x = \dfrac{4}{3}$

**12**

4) $5^{-x} < 5^{2x}$ تكافئ $-x\ln 5 < 2x\ln 5$ تكافئ $x \in \left]0; +\infty\right[$

5) $\frac{2^x}{2^x+1}<\frac{1}{3}$ تكافئ $\frac{2.2^x-1}{3\left(2^x+1\right)}<0$ تكافئ $2^{x+1}<1$ تكافئ $x\in\left]-\infty;-1\right[$

6) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x\le 2$ تكافئ $-x\ln\sqrt{2}\le\ln 2$ تكافئ $-\frac{1}{2}x\le 1$ تكافئ $x\in\left[-2;+\infty\right[$ .

## 2 - دراسة الدوال: $x\mapsto a^x$ و $x\mapsto\sqrt[n]{x}$

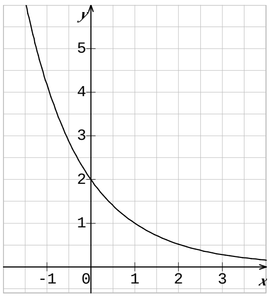
**38** 1) $2^x+3^x=5^x$ تكافئ $\frac{2^x}{5^x}+\frac{3^x}{5^x}=1$

$2^x+3^x=5^x$ تكافئ $\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x=1$

2) $f\left(x\right)=\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x$ ، $f'\left(x\right)=\left(\ln\frac{2}{5}\right)\left(e^{x\ln\frac{2}{5}}\right)+\left(\ln\frac{3}{5}\right)\left(e^{x\ln\frac{3}{5}}\right)$

$f'\left(x\right)=\left(\ln\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\ln\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^x$ $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

| $x$ | $-\infty$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ |
| $f$ | $+\infty$ ↘ $0$ |




## 3 - التزايد المقارن

**40** 1) $\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2+1-e^x$

$\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{e^x}{x^2}\right)=+\infty$

2) $\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}-\frac{x}{x^2}=+\infty$

**47** 1) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}2xe^x-e^x=0$

2) $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}e^{-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^{2x}}=0$

**52** 1) أ) $\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x}{x^2}=0$

ب) $\lim_{x\to 0}f\left(x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3^x}{x^2}=+\infty$

2) $f\left(x\right)=\frac{3^x}{x^2}=\frac{e^{x\ln 3}}{x^2}=\frac{e^{x\ln 3}\times\left[\ln 3\right]^2}{x^2\left[\ln 3\right]^2}=\frac{e^{x\ln 3}}{\left[x\ln 3\right]^2}\times\left[\ln 3\right]^2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x\ln 3}}{\left[x\ln 3\right]^2}\times\left[\ln 3\right]^2=+\infty$ بوضع $X=x\ln 3$ .

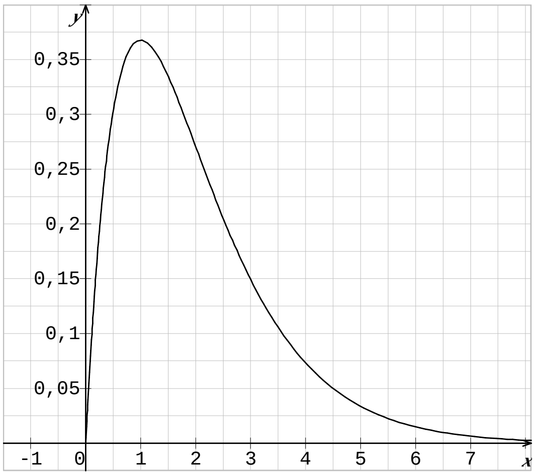
## تمارين للتعمق

**61** الجزء1: 1) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

ب) $f'(x)=(1-x)e^{-x}$ جــ)

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f$ | 0 | ↗ | $\frac{1}{e}$ | ↘ | 0 |

جــ)




2) أ) المستقيم الذي معادلته $y=m$ يقطع المنحني $\left(\Gamma\right)$ في نقطتين.إذن المعادلة $f\left(x\right)=m$ تقبل حلين.

ب) $f(0,3573)\approx 0,2499$ و $f(0,3574)\approx 0,25001$

جــ) $f(x)=0$ تكافئ $x=0$ و $f(x)=\frac{1}{e}$ تكافئ $x=1$

الجزء2: تصويب: $u_0=\alpha$ و $u_{n+1}=u_n e^{-u_n}$

1) أ) $u_0=\alpha$ و $\alpha>0$ و إذا كان $u_n>0$ فإن $u_n e^{-u_n}>0$ و منه $u_{n+1}>0$. إذن $u_n>0$.

ب) $u_{n+1}-u_n=u_n\left(e^{-u_n}-1\right)$

بما أن $u_n>0$ و $e^{-u_n}<1$ فإن $u_{n+1}-u_n<0$ و بالتالي $\left(u_n\right)$ متناقصة

جــ) $\left(u_n\right)$ متناقصة و محدودة من الأسفل بــ0 فهي متقاربة.لتكن $\ell$ نهايتها.

لدينا $\ell=\ell e^{-\ell}$ تكافئ $\ell=0$

2. $w_n=\ln u_n$ . $u_{n+1}=u_n e^{-u_n}$ ومنه $\ln u_{n+1}=\ln u_n+\ln e^{-u_n}=\ln u_n-u_n$

ومنه $w_{n+1}=w_n-u_n$ أي $u_n=w_n-w_{n+1}$

ب) $S_n=u_0+u_1+.....+u_n=(w_0-w_1)+(w_1-w_2)+(w_{n-1}-w_n)+(w_n-w_{n+1})=w_0-w_{n+1}$

جــ) بما أن $u_n$ يؤول إلى0 ، $w_n$ يؤول إلى $-\infty$، إذن $S_n$ يؤول إلى $+\infty$ .

3) $u_1 = f(\alpha) = \frac{1}{4}$ و $f(\beta) = \frac{1}{4}$ إنّ إذا أخذنا $v_0 = \beta$ ، ابتداءً من الرتبة1 يكون $u_n = v_n$ .

**62** 1) المستقيم $D$ يمر بالنقطتين $J(0;1)$ و $K(-1;0)$ معادلته $y = x+1$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (mx+p) = 0$

أي أن المستقيم الذي معادلته $y = mx+p$ مقارب للمنحني عند $+\infty$ و هو المستقيم $D$. إذن $m = p = 1$ .

ب) النقطة $J$ مركز تناظر للمنحني.

جـ) $f(x) = x+1+\varphi(x)$ ، $f(-x) = -x+1+\varphi(-x)$

ومنه $f(x) + f(-x) = 2 + \varphi(x) + \varphi(-x)$ و نعلم أن $f(x) + f(-x) = 2$ ، إذن $\varphi(x) + \varphi(-x) = 0$

$\varphi(-x) = -\varphi(x)$ ومنه الدالة $\varphi$ فردية

د) $f(x) + f(-x) = 2$ و منه $f'(x) - f'(-x) = 0$ ومنه $f'(x) = f'(-x)$. إذن $f'$ زوجية.

3) أ) $\varphi(x) = (ax+b)e^{-x^2}$ ومنه $\varphi(-x) = (-ax+b)e^{-x^2}$ ،

بما أن الدالة $\varphi$ فردية يكون $-ax+b = -ax-b$ و منه $b = 0$

ب) $f(x) = x+1+\varphi(x) = x+1+axe^{-x^2}$ ومنه $f'(x) = 1+\varphi'(x) = 1+a\left(1-2x^2\right)e^{-x^2}$

جـ) معامل توجيه المماس $T$ عند النقطة التي فاصلتها0 (النقطة $J$) هو $f'(0) = 1-e$

$f'(0) = 1+a$ معناه $1-e = 1+a$ أي $a = -e$

د) $f(x) = x+1+axe^{-x^2} = x+1-exe^{-x^2}$

**64** الجزء1: $f(x) = \dfrac{x}{e^x - x}$

1) $g'(x) = e^x - 1$ . $g'(x)$ موجبة إذا كان $x \geq 0$ و سالبة إذا كان $x \leq 0$

إذن الدالة g متزايدة إذا كان $x \geq 0$ و متناقصة إذا كان $x \leq 0$ و $g(0) = 0$ و بالتالي $g(x) \geq 0$ .

2) $g(x) \geq 0$ معناه $e^x - x \geq 1$ أي $e^x - x > 0$

الجزء2:

1) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$

ب) عند $-\infty$ المنحني $(C)$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y = -1$ و عند $+\infty$ المنحني $(C)$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y = 0$ .

2) أ) $f'(x) = \dfrac{(1-x)e^x}{\left(e^x - x\right)^2}$

ب) إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $(1-x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $-1$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{e-1}$ | $\searrow$ | $0$ |

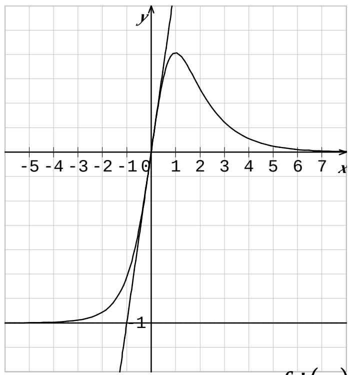
3) أ) معادلة المماس $T$ للمنحني $(C)$ عند النقطة التي فاصلتها0 هي $y = x$ .

ب) وضعية المنحني $(\mathrm{C})$ بالنسبة للمماس$T$ : $f(x)-x=\dfrac{-xg(x)}{e^x-x}$ .

بما أن $g(x)\geq 0$ و $e^x-x>0$ فإن إشارة $f(x)-x$ هي من إشارة $(-x)$

في المجال $]-\infty;0[$ $(\mathrm{C})$ أعلى$T$ و في المجال $]0;+\infty[$ $(\mathrm{C})$ أسفل $T$ .

4)




**66** .1 $f'(x)=(x+1)(1-x)e^{-x}$

$f'(x)>0$ إذا كان $-1<x<1$

$f'(x)<0$ إذا كان $x<-1$ أو $x>1$

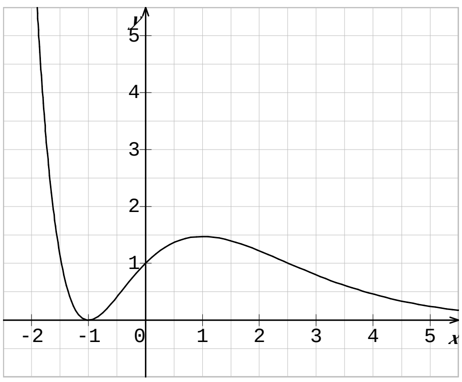
$f'(x)=0$ إذا كان $x=-1$ أو $x=1$

إذن الدالة $f$ متزايدة تماما في المجال $[-1;1]$ و متناقصة تماما في المجالين $]-\infty;-1]$ و $[1;+\infty[$

.2 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{-x}=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{e^x}{x^2}}=0$ المنحني $(C)$ يقبل

مستقيما مقاربا معادلته $y=0$ عند $+\infty$

.3التمثيل البياني:




.4أ) إذا كان $k<0$ المعادلة لا تقبل حلولا.

– إذا كان $k=0$ المعادلة تقبل حلا واحدا $x=-1$

– إذا كان $0<k<\dfrac{4}{e}$ المعادلة تقبل 3 حلول.

– إذا كان $k=\dfrac{4}{e}$ المعادلة تقبل حلين أحدهما $x=1$

– إذا كان $k>\dfrac{4}{e}$ المعادلة تقبل حلا واحدا

ب) – إذا كان $x>-1$ فإن $f(x)\le\frac{4}{e}$ و بالتالي $f(x)<2$. إذن المعادلة $f(x)=2$ ليس لها حل على المجال $[-1;+\infty[$

– إذا كان $x<-1$ فإن الدالة $f$ مستمرة و رتيبة تماما و تأخذ قيمها في المجال $]0;+\infty[$. بما أن 2 ينتمي إلى المجال $]0;+\infty[$ فإنه توجد قيمة وحيدة $x$ تحقق $f(x)=2$

$f(-1)=0$ و $f(-2)\approx 7,39$

بما أن $0<2<7,39$ فإن $-2<\alpha<-1$

جـ) نعلم أن $f(\alpha)=2$ و منه $(\alpha+1)^2e^{-\alpha}=2$ ومنه $(\alpha+1)^2=2e^{\alpha}$

ومنه $\left(\alpha+1=\sqrt{2e^{\alpha}}\right)$ أو $\left(\alpha+1=-\sqrt{2e^{\alpha}}\right)$

بما أن $\alpha<-1$ فإن $\alpha=-1-\sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$

**68** 1) أ) $f'(x)=\dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$

ب) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

| $x$ | $0$ | | $e^2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $-\infty$ | ↗ | $\frac{2}{e}$ | ↘ | $0$ |

2) $f(1)=0$ و $f'(1)=1$ إذن معادلة $T$ هي $y=x-1$

3) $g(x)=x-1-f(x)$

أ) $g'(x)=1-f'(x)=\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}\left[\ln x+2\left(x\sqrt{x}-1\right)\right]$

ب) $g'(1)=0$، و إشارة $g'(x)$ هي من نفس إشارة $\ln x+2\left(x\sqrt{x}-1\right)$

- على $]0;1[$ : $\ln x<0$ و $x\sqrt{x}-1<0$ ومنه $g'(x)<0$
- على $]1;+\infty[$ : $\ln x>0$ و $x\sqrt{x}-1>0$ ومنه $g'(x)<0$ .

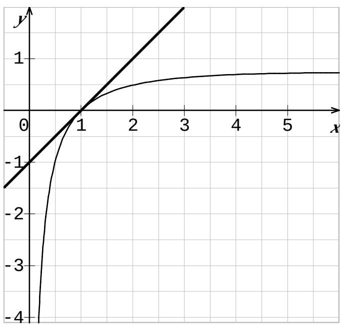
جـ) $g(1)=0$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g$ | | ↘ | $0$ | ↗ | |

نستنتج من جدول التغيرات أنه من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ : $g(x)\ge 0$

د) من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ ، $(C)$ أسفل $T$.

4) الرسم(انظر الشكل)



**73** **الجزء الأول:** $f(x)=\dfrac{e^x-1}{xe^x+1}$

**.1** $h'(x)=e^x\left(x+1\right)$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h$ | | $\searrow$ | $1-\dfrac{1}{e}$ | $\nearrow$ | |

من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $h(x)\geq 1-\dfrac{1}{e}$ أي $h(x)>0$ من أجل $x$ من $\mathbb{R}$.

.2 تصويب: $g(x)$ بدلا من $h(x)$

أ- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{e^x}{x}\right)=-\infty$

ب) $g'(x)=1-e^x$

| $x$ | $-\infty$ | $\beta$ | $0$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g$ | $-\infty$ $\nearrow$ | $0$ $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ $0$ | $\searrow$ $-\infty$ |

جــ) نستعمل مبرهنة القيم المتوسطة

د) إذا كان $x\in\left]-\infty;\beta\right[\cup\left]\alpha;+\infty\right[$ فإن $g(x)<0$ و إذا كان $x\in\left]\beta;\alpha\right[$ فإن $g(x)>0$

**الجزء الثاني:** دراسة تغيرات الدالة $f$ و رسم المنحني $\mathcal{C}$:

.1 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

.2أ) $f'(x)=\dfrac{e^x\left(xe^x+1\right)-\left(xe^x+e^x\right)\left(e^x-1\right)}{\left(xe^x+1\right)^2}$

$$f'(x)=\frac{2e^x-e^{2x}+xe^x}{\left(xe^x+1\right)^2}=\frac{e^x\left(2-e^x+x\right)}{\left(xe^x+1\right)^2}=\frac{e^x g\left(x\right)}{\left(xe^x+1\right)^2}$$

ب) جدول التغيرات

| $x$ | $-\infty$ | | $\beta$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $-1$ | $\searrow$ | $f(\beta)$ | $\nearrow$ | $f(\alpha)$ | $\searrow$ | $0$ |

3) أ) $g(\alpha)=0$ ومنه $e^{\alpha}=\alpha+2$

$$f(\alpha)=\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha e^{\alpha}+1}=\frac{\alpha+2-1}{\alpha(\alpha+2)+1}=\frac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2}=\frac{1}{\alpha+1}$$

ب) تصويب : عين حصرا للعدد $f(\alpha)$ $1,14<\alpha<1,15$ و منه $2,14<\alpha+1<2,15$

ومنه $\frac{1}{2,15}<\frac{1}{\alpha+1}<\frac{1}{2,14}$ أي $0,465<f(\alpha)<0,467$ (الصر سعته $2\times10^{-3}$)

4.معادلة المماس $T$ هي $y=x$

5.أ) $f(x)-x=\frac{e^x-1}{xe^x+1}-x=\frac{e^x-1-x^2e^x-x}{xe^x+1}=\frac{e^x-1-x^2e^x-x+xe^x-xe^x}{xe^x+1}$

$$f(x)-x=\frac{x\left(e^x-xe^x-1\right)+\left(e^x-xe^x-1\right)}{xe^x+1}=\frac{\left(e^x-xe^x-1\right)(x+1)}{xe^x+1}$$

ب) $u'(x)=-xe^x$

إشارة $u'(x)$ هي من نفس إشارة $(-x)$

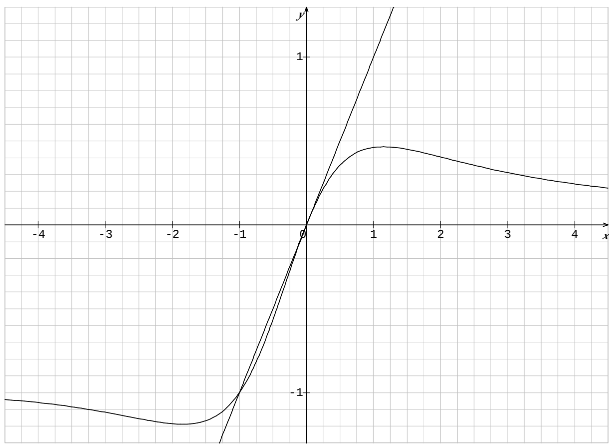
| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $u'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $u$ | | ↗ | 0 | ↘ | |

إشارة $u(x)$ : من أجل كل عدد حقيقي $x$، $u(x)\leq 0$

جـ) إشارة $f(x)-x$ هي من نفس إشارة $-(x+1)$

$(C)$ أعلى $T$ في المجالين $]-\infty;-1[$ و $]0;+\infty[$ و $(C)$ أسفل $T$ في المجال $]-1;0[$

6) الرسم



# الباب الخامس

## الدوال الأصلية

# الأنشطة

**النشاط الأول**
**تصحيح:** /
**الهدف:** تعريف الدالة الأصلية.
**توجيهات:** يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " الدوال الأصلية ".
**الحل:** بسيط
**النشاط الثاني**
**تصحيح:** /
**الهدف:** إعطاء دلالة لمفهوم الدالة الأصلية.
**توجيهات:** يقدم النشاط ضمن أفواج مباشرة بعد النشاط الأول.
**الحل:** بسيط
**النشاط الثالث**
**تصحيح:** /
**الهدف:** إبراز وحدانية الدالة الأصلية التي تحقق شرطا معينا..
**توجيهات:** يقدم النشاط ضمن أفواج مباشرة بعد النشاط الثاني .
**الحل:** بسيط

# الأعمال الموجهة

**دراسة دالة أصلية**
**تصحيح:** /
**الهدف:** إبراز إمكانية ( في بعض الحالات ) دراسة تغيرات دالة أصلية دون تعيين عبارتها بدلالة المجهول.
**توجيهات:** يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.
**الحل:** بسيط
**تعيين دوال أصلية لدالة**
**تصحيح:** /
**الهدف:** توظيف خواص الدوال الأصلية و استنباط بعض الطرق لتعيينها.
**توجيهات:** يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.
**الحل:** بسيط

**الدوال الأصلية للدوال** $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$

**تصحيح:** /
**الهدف:** توظيف خواص الدوال الأصلية و استنباط بعض الطرق لتعيينها.
**توجيهات:** يمكن تقديم العمل في شكل أفواج.
**الحل:** بسيط

**الدوال الأصلية للدوال** $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

**تصحيح:** /
**الهدف:** توظيف خواص الدوال الأصلية و استنباط بعض الطرق لتعيينها.
**توجيهات:** يمكن تقديم العمل في شكل أفواج .
**الحل:** بسيط

# التمارين

## تمارين تطبيقية

### 1 - الدوال الأصلية

**1** نبين أن $F'(x)=f(x)$

**2** 1) الدالة الأصلية للدالة $f$ هي $H$ 2) الدالة الأصلية للدالة $f$ هي $H$

3) الدالة الأصلية للدالة $g$ هي $K$ 4) الدالة الأصلية للدالة $h$ هي $F$

5) الدالة الأصلية للدالة $k$ هي $G$

### 2 ـ حساب الدوال الأصلية

**22** 5) $f(x)=e^{-2x}\left(e^{-2x}+2\right)^3=-\frac{1}{2}\left[-2e^{-2x}\left(e^{-2x}+2\right)^3\right]$

مجموعة الدوال الأصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$ هي الدوال $F:x\mapsto-\frac{1}{8}\left(e^{-2x}+2\right)^4+c$ حيث $c$ ثابت حقيقي.

**23** 5) $f(x)=\frac{1}{x(\ln x+2)^2}=\frac{1}{x}\times\frac{1}{(\ln x+2)^2}$

مجموعة الدوال الأصلية للدالة $f$ على المجال $]1;+\infty[$ هي الدوال $F:x\mapsto-\frac{1}{\ln x+2}+c$ حيث $c$ ثابت حقيقي

**25** 5) $f(x)=\frac{2e^x}{\sqrt{e^x-1}}=2\times\frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}$ ، $I=]0;+\infty[$

مجموعة الدوال الأصلية للدالة $f$ على المجال $]1;+\infty[$ هي الدوال $F:x\mapsto4\sqrt{e^x-1}+c$ حيث $c$ ثابت حقيقي

**27** 4) $f(x)=\frac{6x+3}{x^2+x+1}=3\times\frac{2x+1}{x^2+x+1}$

مجموعة الدوال الأصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$ هي الدوال $F:x\mapsto3\ln\left(x^2+x+1\right)+c$ حيث $c$ ثابت حقيقي.

**28** 4) $f(x)=\frac{3}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=-3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$ ؛

مجموعة الدوال الأصلية للدالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$ هي الدوال $F:x\mapsto-3e^{\frac{1}{x}}+c$ حيث $c$ ثابت حقيقي.

**29** 3) $f(x)=\frac{1}{2}\times\frac{x^2}{x^3+1}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3x^2}{x^3+1}$ ؛

مجموعة الدوال الأصلية للدالة $f$ على المجال $]-1;+\infty[$ هي الدوال $F:x\mapsto\frac{1}{6}\ln\left(x^3+1\right)+c$ حيث $c$ ثابت حقيقي.

**30** 3) $f(x)=\sin x\cos x$

دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$ هي الدالة $F:x\mapsto\frac{1}{2}(\sin x)^2$ أو الدالة $G:x\mapsto-\frac{1}{2}(\cos x)^2$

### 3 ـ المعادلات التفاضلية

**31** 1) $y=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+c$ 2) $y=x^2+x+\frac{1}{x}+c$

3) $y'=\frac{x^2+1}{x^2}=1+\frac{1}{x^2}$ و $y=x-\frac{1}{x}+c$ 4) $y=-\frac{3}{2}cs(2x)+c$ ، $c$ ثابت حقيقي

## تمارين تطبيقية

**44** $f(x)=\sin x\left(a\cos^2 x+b\cos^4 x\right)$

$f(x)=\sin x\left(\sin^2 x\cos 2x\right)$

$f(x)=\sin x\left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 x$

$f(x)=\sin x\left(\cos^2 x-\cos^4 x\right)$

$F(x)=-\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{1}{5}\cos^5 x$

**48** 1) $u'(x)=\frac{\cos^4 x+3\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^6 x}$ ،

$u'(x)=\frac{\cos^2 x+3\left(1-\cos^2 x\right)\sin^2 x}{\cos^4 x}=\frac{3}{\cos^4 x}-\frac{2}{\cos^2 x}$

2) $v(x)=\frac{1}{3}\left[u'(x)+\frac{2}{\cos^2 x}\right]$

الدوال الأصلية للدالة $v$ على $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ معرفة بـــ $x\mapsto\frac{1}{3}\left[u(x)+2\tan x\right]+k$ حيث $k$ ثابت حقيقي

بما أن $V(0)=0$ فإن $k=0$ و $V(x)=\frac{1}{3}\left[\frac{\sin x}{\cos^3 x}+2\tan x\right]$.

**37** 1. $f(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^3}$

2. مجموعة الدوال الأصلية للدالة $f$ على $]1;+\infty[$ هي الدوال من الشكل:

$x\mapsto-\frac{1}{4}\times\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{(x+1)^2}+k$ حيث $k$ ثابت حقيقي

3. $F(0)=1$ معناه $-\frac{1}{4}\times\frac{1}{(0-1)^2}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{(0+1)^2}+k=1$ أي $k=\frac{3}{2}$

و بالتالي $F(x)=-\frac{1}{4}\times\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{3}{2}$

**43** 1. $f(x)=\sin x+\sin^3 x=\sin x\left(1+\sin^2 x\right)=\sin x\left(2-\cos^2 x\right)=2\sin x-\sin x\cos^2 x$

2. $F(x)=-2\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x$

**44** 1. $f(x)=\sin^3 x\cos^2 x=\sin x\left(\sin^2 x\cos^2 x\right)$

$f(x)=\sin x\left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 x$

$f(x)=\sin x\left(\cos^2 x-\cos^4 x\right)$

2. $F(x)=-\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{1}{5}\cos^5 x$

**45** 1. $f(x)=\sin^4 x\cos^5 x=\cos x\left(\sin^4 x\cos^4 x\right)$

$f(x)=\cos x\sin^4 x\left(1-\sin^2 x\right)^2=\cos x\left(\sin^4 x-2\sin^6 x+\sin^8 x\right)$

2. $F(x)=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x$

**46** 1. $f'(x)=4\cos x\sin^3 x$ و $f''(x)=-4\sin^4 x+12\cos^2 x\sin^2 x$

2. $f''(x)=-4f(x)+12\left(1-\sin^2 x\right)\sin^2 x$

$f''(x)=-4f(x)+12\sin^2 x-12\sin^4 x$

$f''(x)=-16f(x)+12\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)$

$f''(x)=-16f(x)-6\cos 2x+6$ ومنه $f(x)=-\frac{1}{16}f''(x)-\frac{3}{8}\cos 2x+\frac{3}{8}$

3. نستنتج أن الدالة $F: x\mapsto -\frac{1}{16}f'(x)-\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{8}x$ أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$.

أي $F(x)=-\frac{1}{4}\cos x\sin^3 x-\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{8}x$

**47** تصويب : $f(x)=\tan^{2004} x+\tan^{2006} x$

يمكن أن نكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=\left(1+\tan^2 x\right)\tan^{2004} x$ و هي من الشكل $u'u^n$ حيث $u(x)=\tan x$

و هي مستمرة على المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ ، إذن دالتها الأصلية على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ هي $F(x)=\frac{1}{5}\tan^{2005} x$

**57** $f(x)=e^x\cos x$

1. $f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)$ وَ $f''(x)=e^x(-2\sin x)$

2. $f(x)=af''(x)+bf'(x)$ معناه $\left(a=-\frac{1}{2}\right)$ و $(b=1)$

إذن $f(x)=-\frac{1}{2}f''(x)+f'(x)$

3. نستنتج أن الدالة $F: x\mapsto -\frac{1}{2}f'(x)+f(x)$ أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$

أي $F(x)=\frac{1}{2}e^x\cos x+\frac{1}{2}e^x\sin x=\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)$

**58** $F(x)=\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)e^{2x}$

$F'(x)=\left(2ax^3+(2b+3a)x^2+(2c+2b)x+2d+c\right)e^{2x}$

من اجل كل عدد حقيقي $x$ : $F'(x)=f(x)$ معناه $\left(a=\frac{1}{2}\right)$ و $\left(b=-\frac{3}{4}\right)$ و $\left(c=\frac{3}{4}\right)$ و $\left(d=-\frac{3}{8}\right)$

$F(x)=\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{3}{8}\right)e^{2x}$

# الباب السادس

# الحساب التكاملي

# الأنشطة

**النشاط الأول**

**تصحيح:** /

**الهدف:** الربط بين مساحة حيز تحت منحن لدالة موجبة على مجال و الدوال الأصلية.

**توجيهات:** يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " تكامل دالة ".

**الحل:** بسيط

**النشاط الثاني**

**تصحيح:** /

**الهدف:** العلاقة بين دالة أصلية و مساحة حيز.

**توجيهات:** يقدم النشاط ضمن أفواج و يتوج بتقديم الفقرة " توظيف الحساب التكاملي لتعيين دوال أصلية ".

**الحل:** بسيط

# الأعمال الموجهة

**دراسة دالة تتضمن لوغاريتم نيبيري**

**تصحيح:** /

**الهدف:** استنباط طريقة لحساب مساحة حيز محدد بمنحنيين.

**توجيهات:** يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

**الحل:** بسيط

**دالة معرفة بتكامل**

**تصحيح:** /

**الهدف:** توظيف تعريف التكامل و الدالة اللوغاريتمية النيبيرية.

**توجيهات:** يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

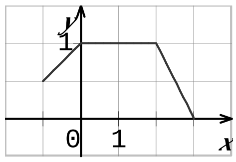
**الحل:** بسيط

# التمارين

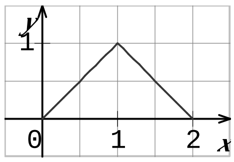
## تمارين تطبيقية

**1 - تكامل دالة**

**3**

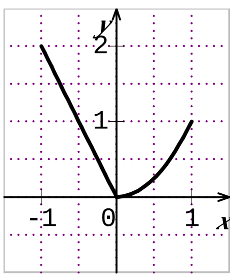



$I = \frac{13}{8}$




$I = 1$

**4** 1.انشاء المنحني $\mathcal{C}$.

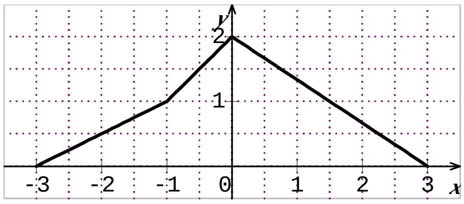



2.نعم الدالة $f$ مستمرة على $[-1;1]$

3. $I = \int_{-1}^{0} -2x dx + \int_{0}^{1} x^2 dx$ $I = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

**5**

.1




.2 نعم $f$ مستمرة على $[-3;3]$.

.3 $I=\int_{-3}^{-1}(0.5x+1.5)dx+\int_{-1}^{0}(x+2)dx+\int_{0}^{3}(-\frac{2}{3}x+2)dx$

**6**

• .1 $y=1+\sqrt{2-(x-1)^2}$ ....... $(*)$

$(*)$ تكافئ: $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ و $y-1\geq 0$

$C$ هو نصف دائرة مركزها $\omega(1;1)$ و نصف قطرها $\sqrt{2}$ واقعة في نصف المستوي الذي معادلته $y\geq 1$ .

.2 تكامل الدالة $f$ هو $I=\sqrt{2}\left(\pi+2\right)$

• .1 $y=\sqrt{4-x^2}$ تكافئ: $x^2+y^2=4$ و $y\geq 0$

$C$ هو نصف دائرة مركزها $O$ و نصف قطرها 2 واقعة في نصف المستوي الذي معادلته $y\geq 0$ .

.2تكامل الدالة $f$ هو $I=2\pi$ .

**7**

$\int_{-1}^{3}f(x)\,dx=8$ ، $\int_{-1}^{2}f(x)\,dx=7$ ، $\int_{0}^{2}f(x)\,dx=4$ .

**10**

1) $\int_{1}^{2}2x\left(x^2-1\right)dx=\left[\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)\right]_1^2=\frac{3}{2}$

2) $\int_{1}^{10}\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\left(\sqrt{10}-1\right)$ ، 3) $\int_{3}^{4}\frac{5x}{\left(x^2-2\right)^3}dx=\frac{5}{56}$ ، 4) $\int_{\ln 2}^{\ln 3}e^x dx=1$

**11**

$\int_{0}^{1}(3x-6)\left(x^2-4x+1\right)^3dx=\left[\frac{3}{8}\left(x^2-4x+1\right)^4\right]_0^1$ ،

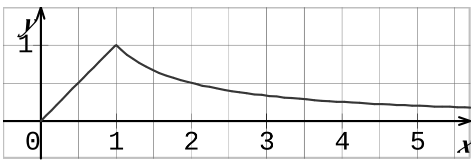
$\int_{0}^{3}\frac{dt}{\sqrt{1+t}}=\left[2\sqrt{1+t}\right]_0^3=4-2=2$ ،

$\int_{1}^{2}\frac{t^3}{t^4+1}dt=\left[\frac{1}{4}\ln\left(t^4+1\right)\right]_1^2=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{17}{2}\right)$ ،

$\int_{0}^{1}\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx=\left[\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right)\right]_0^1=\frac{1}{2}\left(e^2-1\right)$

## 2 - خواص التكامل

**32**



$$I=\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^1 x\,dx+\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx=\frac{1}{2}+\ln 3$$

$$J=\int_2^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx=\int_2^1 \frac{1}{x}\,dx+\int_1^{\frac{1}{2}} x\,dx=-\ln 2-\frac{3}{8}$$

## 3 - القيمة المتوسطة

**36** $f(x)=2x+3$ ، $\mu=3$

$f(x)=|x|$ ، $\mu=0$

**37** 1) من أجل كل $x$ من $\left[\frac{1}{2};1\right]$ لدينا: $\ln x>\ln\frac{1}{2}$ و منه $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\ln x\,dx\geq-\ln 2\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx$ أي $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\ln x\,dx\geq-\frac{\ln 2}{2}$

2) من أجل كل $x$ من $[1;2]$ لدينا: $\frac{1}{1+x^3}\leq\frac{1}{2}$ و منه $\int_1^2\frac{1}{1+x^3}\,dx\leq\frac{1}{2}\int_1^2 dx$ أي $\int_1^2\frac{1}{1+x^3}\,dx\leq\frac{1}{2}$

3) من أجل كل $x$ من $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ لدينا: $-1\leq\sin(x^2+1)\leq 1$ ومنه $-\frac{\pi}{2}\leq\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin(x^2+1)dx\leq\frac{\pi}{2}$

**44** 1) من أجل كل $x$ من $[0;1]$ لدينا:

$\frac{1}{2}\leq\frac{1}{1+x^3}\leq 1$ ومنه $\frac{1}{2}\leq\int_0^1\frac{1}{1+x^3}\,dx\leq 1$

2) على المجال $[0;9]$ الدالة: $f:x\mapsto\frac{1}{1+\sqrt{x}}$ متناقصة تماما، إذن من أجل كل $x$ من $[0;9]$:

$f(9)\leq f(x)\leq f(0)$ و منه $\frac{1}{4}\leq f(x)\leq 1$ أي: $\frac{9}{4}\leq\int_0^9\frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx\leq 9$

**45** 1) على المجال $[1;2]$ الدالة: $f:x\mapsto\sqrt{x^3+1}$ متزايدة تماما،

إذن من أجل كل $x$ من $[1;2]$ : $f(1)\leq f(x)\leq f(2)$ ومنه $\sqrt{2}\leq f(x)\leq 3$ أي: $\sqrt{2}\leq\int_1^2\sqrt{x^3+1}\,dx\leq 3$

2) من أجل كل $x$ من $[0;2]$: $e^{-4}\leq e^{x^2}\leq 1$ ومنه $2e^{-4}\leq\int_0^2 e^{-x^2}\,dx\leq 2$

3) من أجل كل $x$ من $[2;4]$: $\ln 3\leq\ln(x^2-1)\leq\ln 15$ ومنه $2\ln 3\leq\int_2^4\ln(x^2-1)\,dx\leq 2\ln 3+2\ln 5$

**46** تصويب: 1. باستعمال الشكل بين أن: $-\frac{1}{10}x^2+2x-5\leq f(x)\leq\frac{1}{2}x+2$

بقراءة بيانية المنحني $C_f$ يقع أسفل $\Delta$ و أعلى $P$ في المجال $[4;12]$،

نستنتج أن : $-\frac{1}{10}x^2+2x-5\leq f(x)\leq\frac{1}{2}x+2$

2.على المجال $[4;12]$، المنحني $C_f$ أعلى محور الفواصل، إذن: $A=\int_4^{12} f(x)\,dx$

بما أن $\frac{1}{2}x+2 \geq f(x) \geq -\frac{1}{10}x^2+2x-5$ فإن: $\int_4^{12}\left(-\frac{1}{10}x^2+2x-5\right)dx \leq \int_4^{12} f(x)dx \leq \int_4^{12}\left(\frac{1}{2}x+2\right)dx$

دالة أصلية للدالة $g$ المعرفة بـــ $g(x)=-\frac{1}{10}x^2+2x-5$ هي الدالة G المعرفة بـــ: $G(x)=-\frac{1}{30}x^3+x^2-5x$

دالة أصلية للدالة $h$ المعرفة بـــ $h(x)=\frac{1}{2}x+2$ هي الدالة $H$ المعرفة بـــ: $H(x)=\frac{1}{4}x^2+2x$

$$\int_4^{12}\left(-\frac{1}{10}x^2+2x-5\right)dx = G(12)-G(4)=\frac{792}{30}-\left(-\frac{184}{30}\right)=\frac{976}{30}$$

$$\int_4^{12}\left(\frac{1}{2}x+2\right)dx = H(12)-H(4)=60-12=48$$

إذن: $\frac{976}{30} \leq A \leq 48$

**49** (1 $\int_1^4 f(x)\,dx = 3\mu = 6$ ، (2 $\int_1^3 f(x)\,dx = 2\mu = 2\ln 2$ ،

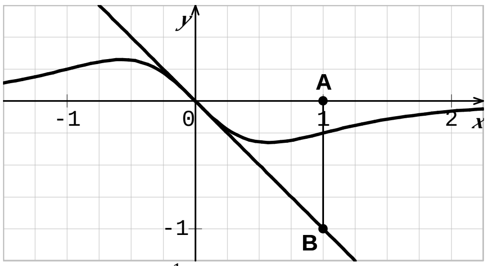
(3 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{74}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times\mu = \frac{1}{2}$

**51** 1) من أجل كل $x$ من $[n;n+1]$: $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$ ومنه $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n}$.

2) حسب مبرهنة الحصر $(I_n)$ متقاربة و تتقارب نحو 0.

## 4 - التمديد إلى دالة إشارتها كيفية

**59**




$A_1 = \int_0^1 -\frac{-x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$ ومنه $A_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$ ومنه $A_1 = \left[-\frac{1}{2(x^2+1)}\right]_0^1$ أي $A_1 = \frac{1}{4}$

2) أ- معادلة المماس $T$ للمنحني $(C)$ عند المبدأ هي: $y=-x$

ب-المنحني $(C)$ أسفل $T$ في المجال $]-\infty;0[$ و $(C)$ أعلى $T$ في المجال $]0;+\infty[$ .

ج- المساحة $A_2$ للمثلث المحدد بـــ $T$ ، محور الفواصل و المستقيم $D$ هي $A_2 = \frac{1}{2}u.a$ .

(3 $A = A_2 - A_1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}u.a$

(4 أ- $I(\lambda) = -\frac{1}{2}\int_0^{\lambda}\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx = \left[\frac{1}{2(x^2+1)}\right]_0^{\lambda}$

$$I(\lambda)=\left[\frac{1}{2(x^2+1)}\right]_0^{\lambda}=\frac{1}{2(\lambda^2+1)}-\frac{1}{2}$$

ب- $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} I(\lambda)=-\frac{1}{2}$ .

عندما يؤول $\lambda$ إلى $+\infty$ ، مساحة المستوي المحدد بالمنحني $(C)$ و محور الفواصل تقترب من $(-A_2)$ حيث $A_2$ مساحة المثلث $OAB$ .

## 5 - توظيف الحساب التكاملي لحساب دوال أصلية

**71** .1 $I+J=\frac{\pi^2}{8}$ .

أ.2 - $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos(2x)$

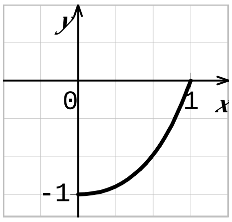
ب-نضع: $u(x)=x$ و $v'(x)=\cos 2x$ ومنه $u'(x)=1$ و $v(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$

$$I-J=\left[\frac{x}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x dx$$ ومنه $$I-J=\frac{1}{2}$$

.3 $I=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi^2}{8}\right)$ و $J=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}\right)$

## 6- بعض تطبيقات الحساب التكاملي

**73**




$$a=\int_0^1 -(x-1)e^x dx$$

$$a=\left[(2-x)e^x\right]_0^1=e-2$$

(2 $$v=\int_0^1 \pi\left[(x-1)e^x\right]^2 dx=\pi\int_0^1\left(x^2-2x+1\right)e^{2x} dx$$

$$v=\pi\left[\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{5}{4}\right)e^{2x}\right]_0^1 \text{ ، } v=\pi\frac{e^2-5}{4}u.v$$

**تمارين للتعمق**

**86** .1 $J=\left[\frac{1}{2}\ln(1+2\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\ln 3$

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x+\cos x}{1+2\sin x}dx$$

.2 $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=1$ ومنه $I=1-J=1-\frac{1}{2}\ln 3$

**87** 1) مجموعة النقط $M$ هي ربع دائرة مركزها O و نصف قطرها $r$ واقعة في الربع الأول.

(2 . $\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}r^2$ ، $\int_{-r}^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}r^2$

**97** 1. من اجل كل $x$ من $[0;1]$ : $\frac{1}{1+e} \le \frac{1}{1+e^x} \le \frac{1}{2}$ و $e^{nx} > 0$ و منه $\frac{e^{nx}}{1+e} \le \frac{e^{nx}}{1+e^x} \le \frac{e^{nx}}{2}$

2. بالمكاملة على المجال $[0;1]$ نجد :

$\frac{e^n - 1}{(1+e)n} \le u_n \le \frac{e^n - 1}{2n}$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

$\frac{1-e^{-n}}{(1+e)n} \le \frac{u_n}{e^n} \le \frac{1-e^{-n}}{2n}$،حسب مبرهنة الحصر يكون $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{e^n} = 0$ .

## مســائل

**112**

**الجزء A** :

1. $f(0) = 1$ و $g(0) = 0$ إذن $C_g$ هو الذي يمر بمبدأ المعلم.

2. الدالتان $f$ و $g$ زوجيتان.

3. نقتصر الدراسة على $\mathbb{R}^+$ .

$f'(x) = -2xe^{-x^2}$ ، $g'(x) = 2x(1-x^2)e^{-x^2}$

| $x$ | $0$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ |
| $f$ | $1$ $\searrow$ $0$ |

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g$ | $0$ | $\nearrow$ | $e^{-1}$ | $\searrow$ | $0$ |

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ، $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ (بوضع $X = -x^2$ )

4. $f(x) - g(x) = (1-x^2)e^{-x^2}$

$C_f$ أعلى $C_g$ إذا كان $-1 < x < 1$ و $C_f$ أسفل $C_g$ إذا كان $x < -1$ أو $x > 1$ ، $C_f$يقطع $C_g$ عند النقطتين اللتينفاصلتاهما$-1$ و $1$.

**الجزءB** : $G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$

1. $G$ هي الدالة الأصلية للدالة $g$ التي تنعدم عند0.

2. الدالة $g$ موجبة تماما على $]0;+\infty[$. من أجل $x > 0$ ، $G(x)$ هو مساحة حيز مجموعة النقط $M(a;b)$ حيث $0 \le a \le x$ و $0 \le b \le g(x)$ .

3. الدالة $G$ متزايدة على $\mathbb{R}$ .

4.الدالة $F$ هي دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$، إذن مشتقة الدالة $x \mapsto \frac{1}{2}\left[F(x)-xe^{-x^2}\right]$ هي :

$x \mapsto \frac{1}{2}\left[f(x)-e^{-x^2}+2x^2e^{-x^2}\right]$ أي الدالة $g$.

$G$ و $F$ لهما نفس المشتقة على $\mathbb{R}$. $G(0)=0$ و $\frac{1}{2}\left[F(0)-0\right]=0$ . إذن $G(x)=\frac{1}{2}\left[F(x)-xe^{-x^2}\right]$

5.أ- $\lim\limits_{x\to+\infty} -xe^{-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left(-x^2e^{-x^2}\right)=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=\ell$ ،إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)=\frac{\ell}{2}$ .

ب- $N=\int_0^1 (e^{-t^2}-t^2e^{-t^2})dt$ و $f(t)>g(t)$ على المجال $[0;1]$ .N هو مساحة الحيز المحدد بالمنحنيين $C_f$ و $C_g$ و محور التراتيب.

جــ-نضع من أجل كل $x\geq 1$ :

$D_1$ : مساحة الحيز المحدد بالمنحني $C_f$، محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$ .

$D_2$ : مساحة الحيز المحدد بالمنحني $C_g$، محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$ .

$D_3\left(x\right)$ : مساحة حيز مجموعة النقط $M(a;b)$ التي تحقق $1\leq a\leq x$ و $0\leq b\leq f(x)$ .

$D_4\left(x\right)$ : مساحة حيز مجموعة النقط $M(a;b)$ التي تحقق $1\leq a\leq x$ و $0\leq b\leq g(x)$ .

إذا كانت $F$ و $G$ دالتان أصليتان للدالتين $f$ و $g$ على $\mathbb{R}^+$ و $F(0)=G(0)=0$

$$\int_0^x (e^{-t^2}-t^2e^{-t^2})dt=F(x)-G(x) \quad \text{و} \quad \int_0^x (e^{-t^2}-t^2e^{-t^2})dt=\int_0^1 (e^{-t^2}-t^2e^{-t^2})dt+\int_1^x (e^{-t^2}-t^2e^{-t^2})dt$$

أي $\int_0^x (e^{-t^2}-t^2e^{-t^2})dt=D_2-D_1-\left(D_4(x)-D_3(x)\right)$

$$\int_0^x (e^{-t^2}-t^2e^{-t^2})dt=N-\left(D_4(x)-D_3(x)\right)$$

بما أن من أجل كل $x\geq 1$ : $D_4(x)-D_3(x)\geq 0$ يكون : $N\geq F(x)-G(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=\ell$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)=\frac{\ell}{2}$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)-G(x)=\ell-\frac{\ell}{2}=\frac{\ell}{2}$

إذن $N\geq \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)-G(x)$ أي $N\geq\frac{\ell}{2}$ .

**ملاحظة:** $\int_0^x [f(t)-g(t)]dt=\int_0^1 [f(t)-g(t)]dt++\int_1^x [f(t)-g(t)]dt$

ومنه $\int_0^x [f(t)-g(t)]dt-\int_0^1 [f(t)-g(t)]dt=\int_1^x [f(t)-g(t)]dt$

من أجل كل $x\geq 1$ : $f(x)<g(x)$ فيكون $\int_1^x [f(t)-g(t)]dt<0$ ومنه $\int_0^x [f(t)-g(t)]dt<\int_0^1 [f(t)-g(t)]dt$

ومنه $F(x)-G(x)<\int_0^1 [f(t)-g(t)]dt$ و بالتالي $\frac{\ell}{2}<\int_0^1 [f(t)-g(t)]dt$ ومنه $\frac{\ell}{2}<\int_0^1 \left[(1-t^2)e^{-t^2}\right]dt$

# الباب السابع

# الإحتمالات الشرطية

# الأنشطة

**النشاط الأول :**

تصحيح: B " ثلاثة أوجه و ظهر أو ثلاثة ظهور و وجه "

- حل مسائل في الاحتمالات تؤول إلى توظيف قانون التوزيعات المنتظمة.
- التعرف على تجربة برنولي.

**النشاط الثاني :**

- حل مسائل في الاحتمالات تؤول الى توظيف قانون التوزيعات المنتظمة.

**النشاط الثالث :**

- حل مسائل في الاحتمالات تؤول إلى توظيف قانون التوزيعات المنتظمة.
- توظيف المتغير العشوائي المستمر لحل مسائل في الاحتمالات.

**النشاط الرابع :**

- استعمال نتائج محاكاة من أجل قياس تلاؤم سلسلة مشاهدة و نموذج احتمالي.

**النشاط الخامس :**

- حل مسائل في الاحتمالات تؤول إلى توظيف قانون التوزيعات المنتظمة.
- التعرف على أن دالة معرفة على مجال هي كثافة احتمال.
- حساب قانون احتمال متغير عشوائي يقبل دالة f ككثافة احتمال و حساب الأمل الرياضي، التباين و الانحراف المعياري .
-

# الأعمال الموجهة ( 1 )

I) محاكاة مرجعية : بإتباع الخطوات المبينة على المجدول اكسال تتحصل على إجابة بالمحاكاة للنشاط رقم 2 .

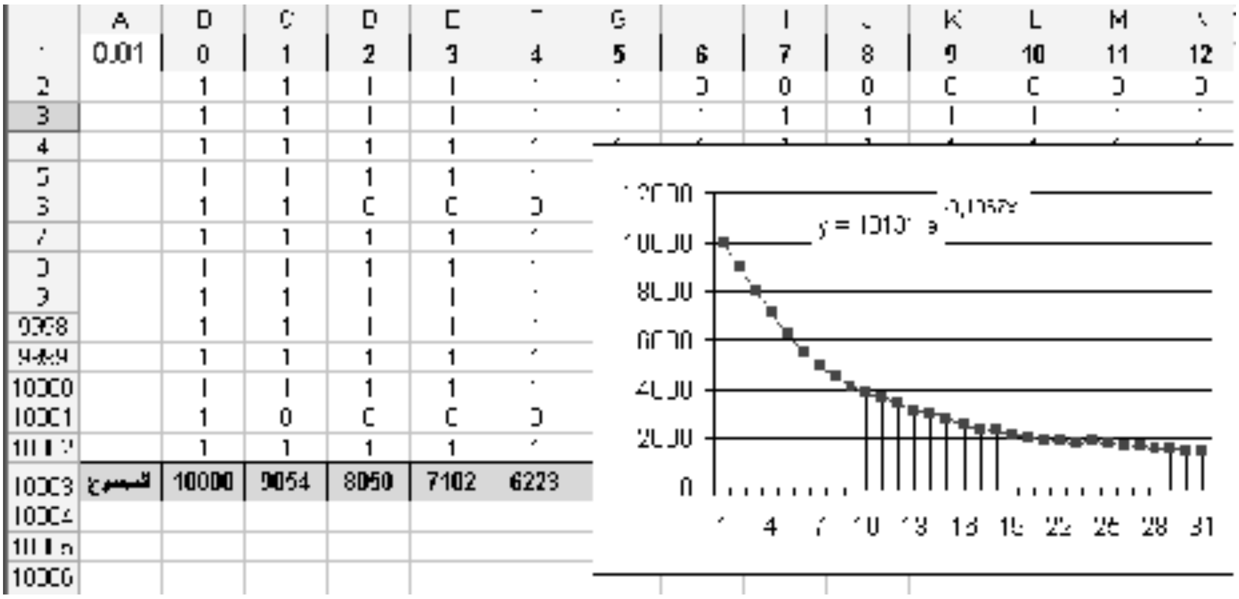
II) إنشاء مثلث :

- تخصيص ثلاثة أعمدة متجاورة لتوليد الأعداد العشوائية x ، y ، z التي تمثل أطوال أضلاع المثلث ( مثلا : 100 قيمة لكل ضلع )
- العمود الرابع يخصص للتحقق من شرط وجود المثلث ( 1 : المثلث موجود ، 0 : المثلث غير موجود ) و ذلك بالتعليمتين SI و ET .
- في العمود الخامس نحسب احتمال تحقق مثلث ( في الخلية 23 من هذا العمود D مثلا نكتب = SOMME( D1:D23)/23
- بالضغط على الزر F9 نلاحظ التغيرات الحاصلة و يمكنك استخراج قيمة استقرار التواترات .

# الأعمال الموجهة ( 2 ) :

تعديلات : - في الخطوة الثانية إدخال قيم الزمن t وهي 0 ، 1 ، 2، 3 ، ... في الحيز A2:AG2 بدل الحيز A2:A32

- في الخطوة الرابعة التعليمة هي SI(ALEA()<$A$1;0;B2) = و ذلك في الخلية C2 ثم نعمم على العمود C
- في الخلية D2 نكتب التعليمة SI(C2=0;0;SI(ALEA()<$A$1;0;B2)) = لأنه إذا ماتت الذرة في لحظة ما بالضرورة هي ميتة في اللحظ الموالية . ثم نعمم محتوى الخلية D2 على كل العمود و محتويات العمود D علة الأعمدة المتبقية . و نواصل حسبما ذكر في الكتاب سنحصل على:



# التمارين

**3** (1 $p=C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{8}$

2) نعلم أن " احتمال أن يكون عدد مرات ظهور رقم زوجي أكبر تماما من عدد مرات ظهور رقم فردي " يساوي " احتمال أن يكون عدد مرات ظهور رقم فردي أكبر تماما من عدد مرات ظهور رقم زوجي "

لدينا إذن $p+p'+p'=1$ و منه $p'=\frac{1-p}{2}=\frac{5}{16}$

(3 $p=0$ و $p'=\frac{1}{2}$

**15** (1 $k=\frac{1}{2}$

(2 $p(X\geq\frac{\pi}{3})=\frac{3}{4}$

(3 $\int_0^{\pi}xf(x)dx=\frac{\pi}{2}$

**31** 1) نضع S الحادثة " الثلاجة فيها عيب التلحيم " ، E الحادثة " الثلاجة فيها عيب الكتروني "
D الحادثة " الثلاجة غير صالحة " لدينا $p(S)=0,03$ ، $p(E)=0,02$

$$P(D)=p(S\cup E)=p(S)+p(E)-p(S\cap E)$$
$$=p(S)+p(E)-p(S)\times p(E)=0,0494$$

2)أ) عرض 800 ثلاجة في السوق يمكن اعتباره تجربة عشوائية ذات مخرجين " ثلاجة صالحة " و " ثلاجة غير صالحة "
إذن X يتبع قانون ثنائي الحد وسيطاه 800 و 0,0494
إذن من أجل كل عدد طبيعي k محصور بين 0 و 800 ينتج

$$p(X=k)=C_{800}^{k}(0,0494)^{k}\times(0,9506)^{800-k}$$

ب) $E(X)=800\times 0,0494=39,52$

3) أ) نعتبر $Y$ المتغير العشوائي المساوي لعدد الثلاجات غير الصالحة ضمن الثلاجات 25 المشتراة

إذن $Y$ يتبع قانون ثنائي حد وسيطاه 25 و 0,0494

$$p(Y=2)=C_{25}^{2}(0,0494)^{2}\times(0,9506)^{23}$$

ب) نعتبر $Z$ المتغير العشوائي المساوي لعدد الثلاجات غير الصالحة ضمن n ثلاجة مشتراة

إذن $Z$ يتبع قانون ثنائي حد وسيطاه n و 0,0494 . نبحث عن n حيث $p(Z\geq 1)\leq\frac{1}{2}$

ينتج $1-p(Z\prec 0)\leq\frac{1}{2}$ و منه $1-p(Z=0)\leq\frac{1}{2}$ أي $p(Z=0)\geq\frac{1}{2}$

و بالتالي $0,9506^{n}\geq\frac{1}{2}$ و منه $n\leq\frac{-\ln 2}{\ln(0,9506)}\simeq 13,68$

**و عليه ، فعلى التاجر أن يشتري 13 ثلاجة على الأكثر .**

**4) نعتبر W المتغير العشوائي المرفق لمدة صلاحية الثلاجة دون أي عطب فهو يتبع قانون أسي و سيطه 0,0007**

لدينا $p(700\leq W\leq 1000)=\int_{700}^{1000}f(x)dx$

$$=e^{-0,49}-e^{-0,7}\simeq 0,116$$

( الفروع ب / ج / د غير تابعة لهذا التمرين )

# الباب الثامن

## قوانين الإحتمال

# الأنشطة

**النشاط الأول :**

- حل مسائل في الاحتمالات توظف المتغيرات العشوائية ، قانون الاحتمال ، الأمل الرياضياتي ، التباين و الانحراف المعياري .
- تنظيم معطيات من أجل عدها باستعمال المبدأ الأساسي للعد .

**النشاط الثاني :**

- إيجاد قانون احتمال لمغير عشوائي
- حل مسائل في الاحتمالات توظف المتغيرات العشوائية ، قانون الاحتمال ، الأمل الرياضياتي ، التباين و الانحراف المعياري .
- تنظيم معطيات من أجل عدها باستعمال المبدأ الأساسي للعد .

**النشاط الثالث :**

- تنظيم معطيات من أجل عدها باستعمال المبدأ الأساسي للعد .
- نمذجة وضعيات بالاعتماد على التجارب المرجعية للسحب أو الإلقاء .

**النشاط الرابع :**

- - تنظيم معطيات من أجل عدها باستعمال المبدأ الأساسي للعد .

**النشاط الخامس :**

- حل مسائل في الاحتمالات توظف المتغيرات العشوائية ، قانون الاحتمال ، الأمل الرياضياتي ، التباين و الانحراف المعياري .
- تنظيم معطيات من أجل عدها باستعمال المبدأ الأساسي للعد .

**النشاط السادس :**

- حل مسائل في الاحتمالات توظف المتغيرات العشوائية ، قانون الاحتمال ، الأمل الرياضياتي ، التباين و الانحراف المعياري .
- تنظيم معطيات من أجل عدها باستعمال المبدأ الأساسي للعد .
- التعرف على استقلال أو ارتباط حادثتين .
- توظيف دستور الاحتمالات الكلية لحل مسائل في الاحتمالات تتعلق بالسحب من أكثر من كيس .

# الأعمال الموجهة ( 1 )

I) تاريخ الميلاد

$$P_n(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{A_{365}^{34}}{365^{365}} \simeq 1 - 0,205 \simeq 0,795$$

**يوجد حوالي % 80 من الفرص لوجود تلمي>يم على الأقل لهما نفس تاريخ الميلاد**

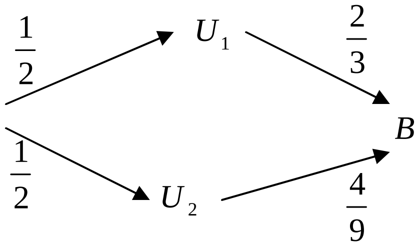
| n | **15** | **20** | **23** | **30** | **50** | **57** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_n$ | 25 % | 41 % | 50 % | 70 % | 97 % | 99 % |

تطبيق : لتكن A " كل قطعة تحوي حبة لؤلؤ على الأقل "

* الجدول التالي يبين الحالات المختلفة لعدد حبات اللؤلؤ في كل قطعة

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **القطعة 1** | **0** | **0** | **3** | **0** | **0** | **1** | **1** | **2** | **2** | **1** |
| **القطعة 2** | **0** | **3** | **0** | **1** | **2** | **0** | **2** | **0** | **1** | **1** |
| **القطعة 3** | **3** | **0** | **0** | **2** | **1** | **2** | **0** | **1** | **0** | **1** |

$$\text{P(A)} = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة لـA}}{\text{عدد الحالات الكلية}} \qquad P(A) = \frac{6}{10} = 0,6$$

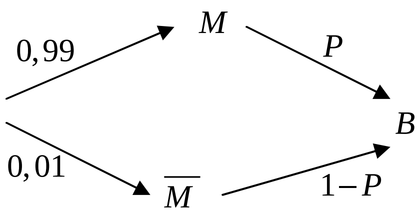



2) استعمال الشجرة

$$P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$P(U_1 \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(U_1 / B) = \frac{P(U_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{3}{5}$$




تطبيق :اختبار الكشف عن مرض :

نضع : T " الاختبار موجب " ، M " الشخص مريض "

$$P(T) = 0,99 \times p + 0,01 \times (1-p)$$
$$= 0,98p + 0,01$$

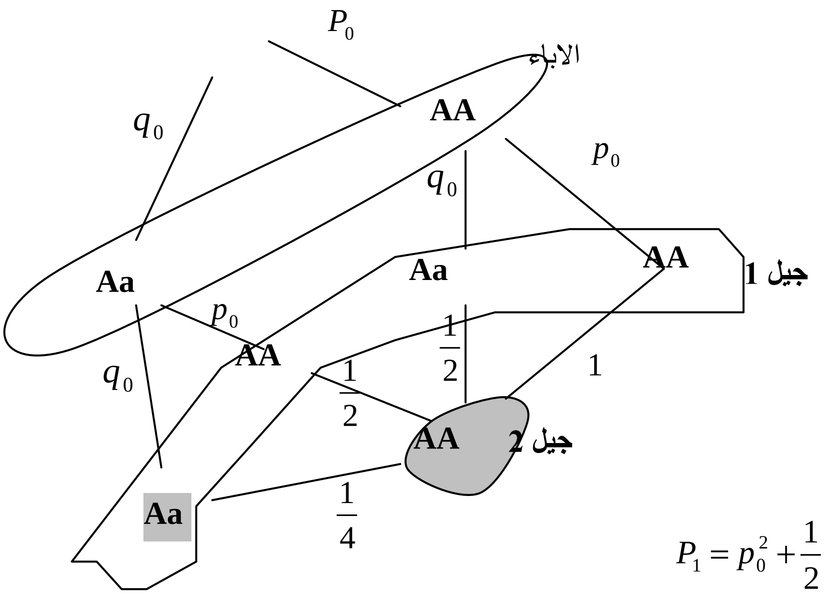
$$P(M/T) = P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}$$

$$= \frac{0,99p}{0,98p + 0,01} = \frac{99p}{98p+1}$$

# الأعمال الموجهة ( 2 )

علم الوراثة :

حسب الشجرة ( المخطط ) المقابلة لدينا




$$P_1 = p_0^2 + \frac{1}{2}p_0q_0 + \frac{1}{2}p_0q_0 + \frac{1}{4}q_0^2 = \left(p_0 + \frac{q_0}{2}\right)^2$$

بالمثل نجد $r_1 = \left(r_0 + \frac{q_0}{2}\right)^2$

و نستنتج أن $q_1 = 1 - p_1 - r_1 = \left(p_0 + \frac{q_0}{2}\right)^2 - \left(r_0 + \frac{q_0}{2}\right)^2$

2) و بما أن $\alpha = p_0 - r_0$ ينتج $q_0 = 1 - p_0 - r_0$

و منه $p_1 = \left(p_0 + \frac{1}{2} - p_0 + \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2$ بالمثل نجد $r_1 = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2$

ملاحظة : $p_1 - r_1 = \alpha = p_0 - r_0$

وبالتالي $q_1 = 1 - p_1 - r_1 = \frac{1-\alpha^2}{2}$

لاحظ أن : $p_0 + q_0 + r_0 = 1$ ، $p_1 + q_1 + r_1 = 1$ ..... و هكذا

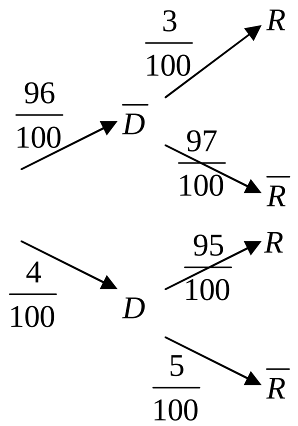
و مادام $\alpha = p_1 - r_1 = p_0 - r_0$ فبالنسبة للجيل الثاني يمكن التعبير عن $r_2; p_2; q_2$ بدلالة $\alpha$ مع $\alpha = p_1 - r_1$

الخلاصة :

تبقى النتائج ثابتة من أجل أس جيل أي $r_n = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2$ ، $q_n = \frac{1-\alpha^2}{2}$ ، $p_n = \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2$

مفاتيح USB :

نضع D " مفتاح USB غير صالح " ، R " وحدة الفرز ترفض مفتاح USB "




لدينا $p(D) = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$ و منه $p(\overline{D}) = 1 - p(D) = \frac{24}{25}$

و أيضا $p_{\overline{D}}(R) = \frac{3}{100}$ و منه $p_{\overline{D}}(\overline{R}) = 1 - p_{\overline{D}}(R) = \frac{97}{100}$

و أيضا $p_D(R) = \frac{95}{100} = \frac{19}{20}$ و منه $p_D(\overline{R})1 - p_{\overline{D}}(\overline{R}) = \frac{1}{20}$

و نلخص هذه النتائج كما يلي على الشجرة

1) أ) $p_1 = p(D \cap \overline{R}) = p(D) \times p_D(R) = \frac{1}{500} = 0,002$

$p_2 = p(R \cap \overline{D}) = p(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(\overline{R}) = \frac{18}{625} = 0,0288$

$p_3 = p(\overline{D} \cap R) + p(\overline{R} \cap D) = p_2 + p_1 = \frac{77}{2500} \simeq 0,031$

ب) $p_4 = p(\overline{R}) = p(D) \times p_D(\overline{R}) + p(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(\overline{R}) = \frac{2333}{2500} \simeq 0,933$

2) حسب قانون برنولي و من أجل تحقق الحادثة R ، k مرة من بين n محاولة لدينا

$p(R) = C_n^k \left[p(R)\right]^k \times \left[p(\overline{R})\right]^{n-k}$

و منه $p_5 = C_5^1 p(R) \times \left[p(\overline{R})\right]^4 \simeq 0,249$ و بالمثل ينتج $p_6 \simeq 0,708$ ; $p_7 = 1 - p_5 - p_6 \simeq 0,044$

# التمارين

**6**

| $P(F)$ | $P(\overline{F})$ | $P_F(B)$ | $P_F(\overline{B})$ | $P_{\overline{F}}(B)$ | $P_{\overline{F}}(\overline{B})$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{4}{7}$ | $\frac{3}{7}$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{5}{7}$ |

**9** 1) أ) $p(X \le 10) = 1 - e^{-0,08(10)} = 1 - e^{-0,8} \simeq 0,55$

ب) $p(X \ge 30) = 1 - p(X \prec 30) = 1 - (1 - e^{-0,08(30)}) = e^{-2,4} \simeq 0,09$

2) $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 12,5$

**25** – للانتقال من O الى A ينبغي على العنكبوت سير 4 خطوات اثنتان في اتجاه $\vec{i}$ و اثنتان في اتجاه $\vec{j}$ و بترتيب الخطوات الأربعة تنتج المسارات المطلوبة و التي عددها $C_4^2 = 6$

– للانتقال من $B(4;3)$ الى $C(5;6)$ ينبغي على العنكبوت سير 4 خطوات ، $5 - 4 = 1$ خطوة في اتجاه $\vec{i}$ و $6 - 3 = 3$ خطوة في اتجاه $\vec{j}$ و عليه عدد المسارات من B الى C هو $C_4^1 = 4$

و عليه تكون النتائج كمايلي

| **السؤال** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|
| **عدد المسارات** | $C_4^2 = 6$ | $C_7^3 = 35$ | $C_{11}^5 = 462$ | $C_4^2 \times C_7^3 = 210$ | $C_4^2 \times C_3^1 \times C_4^1 = 72$ |

**37** (1 $a = \dfrac{13}{60}$ (2 $P(X \geq \dfrac{5}{2}) = p(X \geq 3) = \dfrac{5}{12}$ **(3** $P(X \prec 1) = p(X = -1) = \dfrac{1}{3}$

**(4** $P(X^2 - 6X + 8 \prec 0) = p\left[(X-4)(X-2) \prec 0\right] = p(2 \leq X \leq 4) = \dfrac{2}{3}$

**65** (1 $p(F) = 1 - \dfrac{12}{100} = \dfrac{88}{100} = 0,88$ ، $p_{\overline{F}}(\overline{L}) = 0,2$ ، $p_F(\overline{L}) = 0,08$

(2 أ) $p(\overline{F} \cap \overline{L}) = p(\overline{F}) \times p(\overline{L}) = 0.2 \times 0.12 = 0.024$

ب) $p(\overline{F} \cap L) = p(\overline{F}) \times p(L) = 0.88 \times 0.08 = 0.0704$

ج) $p(\overline{F}) = p(\overline{F} \cap L) + p(\overline{F} \cap \overline{L}) = 0,024 + 0,0704 = 0.0944$

(3 $p_{\overline{F}}(\overline{L}) = \dfrac{p(\overline{F} \cap \overline{L})}{p(\overline{F})} = \dfrac{0,024}{0,0944} \simeq 0,25$

(4 أ) $p(F \cap L) = 1 - (0,024 + 0,0704 + 0,0964) = 0,8096$

ب) $p = 1 - (0,8096)^{20} \simeq 0,985$

# كتاب الأستاذ

الشعب: • رياضيات

• تقني رياضي

• علوم تجريبية

# الجزء الثاني

# الباب الأول

## المتتاليات العددية

# الأنشطة

**النشاط الأول**

**تصحيح:** /

**الهدف:** مقاربة مبدأ الاستدلال بالتراجع.

**توجيهات:** يقدم النشاط كمدخل للفقرة " مبدأ الاستدلال بالتراجع " و يتم إنجازه ضمن أفواج مع استعمال جهاز الداتاشو.

**الحل:**

(1

| A | B | C |
|---|---|---|
| [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| 1 | 1 | 1 |
| 3 | 4 | 2 |
| 5 | 9 | 3 |
| 7 | 16 | 4 |
| 9 | 25 | 5 |
| 11 | 36 | 6 |
| 13 | 49 | 7 |
| 15 | 64 | 8 |
| 17 | 81 | 9 |
| 19 | 100 | 10 |
| 21 | 121 | 11 |
| 23 | 144 | 12 |
| 25 | 169 | 13 |
| 27 | 196 | 14 |
| 29 | 225 | 15 |
| 31 | 256 | 16 |
| 33 | 289 | 17 |
| 35 | 324 | 18 |
| 37 | 361 | 19 |
| 39 | 400 | 20 |
| 41 | 441 | 21 |
| 43 | 484 | 22 |
| 45 | 529 | 23 |
| 47 | 576 | 24 |

| | | |
|---|---|---|
| 49 | 625 | 25 |
| 51 | 676 | 26 |
| 53 | 729 | 27 |
| 55 | 784 | 28 |
| 57 | 841 | 29 |
| 59 | 900 | 30 |
| 61 | 961 | 31 |
| 63 | 1024 | 32 |
| 65 | 1089 | 33 |
| 67 | 1156 | 34 |
| 69 | 1225 | 35 |
| 71 | 1296 | 36 |
| 73 | 1369 | 37 |
| 75 | 1444 | 38 |
| 77 | 1521 | 39 |
| 79 | 1600 | 40 |
| 81 | 1681 | 41 |
| 83 | 1764 | 42 |
| 85 | 1849 | 43 |
| 87 | 1936 | 44 |
| 89 | 2025 | 45 |
| 91 | 2116 | 46 |
| 93 | 2209 | 47 |
| 95 | 2304 | 48 |
| 97 | 2401 | 49 |
| 99 | 2500 | 50 |
| 101 | 2601 | 51 |

2) $1+3+...+55=784=28^2$.

3) $1+3+...+87=1936=44^2$.

4) $1+3+...+(2n-1)=\left(\frac{2n-1+1}{2}\right)^2=n^2$.

5) نضع $A=1+3+...+(2n-1)+(2n+1)$

إذن $A=n^2+(2n+1)=(n+1)^2$.

**النشاط الثاني**

**تصحيح:** /

**الهدف:** التذكير بالمتتالية الحسابية و المتتالية الهندسية.

**توجيهات:** يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم الفقرة " تذكير حول المتتاليات " و يتم إنجازه ضمن أفواج.

**الحل:**

$A$. 1)

| u1 | u2 | u3 | u4 | u5 | u6 | u7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] |

2) ليكن $n$ عددا طبيعيا ، $u_{n+1}=u_n+0{,}15u_n=1{,}15u_n$ ؛ إذن $(u_n)$ متتالية هندسية أساسها $1{,}15$ وحدها الأول $u_1=15000$.

3) من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $u_n=15000\times1{,}15^n$.

4) ابتداء من $n=5$ يكون $u_n>25000$.

$B$. 1)

| v1 | v2 | v3 | v4 | v5 | v6 | v7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 15000 | 16500 | 18000 | 19500 | 21000 | 22500 | 24000 |

2) ليكن $n$ عددا طبيعيا ، $v_{n+1}=v_n+1500$ ؛ إذن $(v_n)$ متتالية حسابية أساسها 1500 وحدها الأول $v_1=15000$.

3) من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $v_n=1500n+15000$.

4) ابتداء من $n=8$ يكون $v_n>25000$.

**النشاط الثالث**

**تصحيح:** /

**الهدف:** مقاربة مفهوم متتالية محدودة من الأعلى.

**توجيهات:** يقدم النشاط كمدخل للفقرة " متتالية محدودة ... " و يتم ضمن أفواج كما يتم استغلال جهاز الداتاشو لملاحظة التقارب.

**الحل:**

$D_f = [-6;+\infty[$ (1 .$A$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -6} \dfrac{f(x)-f(-6)}{x+6} = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -6} \dfrac{\sqrt{x+6}}{x+6} = +\infty$ (2

الدالة $f$ لا تقبل الاشتقاق على يمين $-6$؛ و $(C_f)$ يقبل مماسا موازيا لمنحى $\vec{j}$ عند النقطة ذات الفاصلة $-6$ .

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ . (3

4) لدينا $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+6}}$ ومن أجل كل $x$ من المجال $]-6;+\infty[$ ، $f'(x) > 0$ إذن الدالة $f$ متزايدة تماما على $[-6;+\infty[$ .

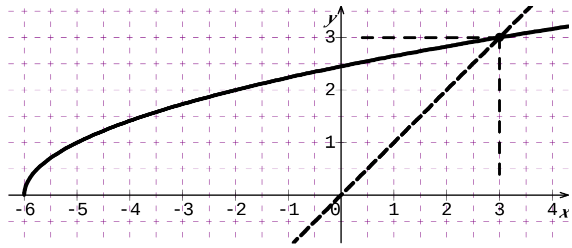
(5

| $x$ | $-6$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $0$ $\nearrow$ $+\infty$ |

(6 $\sqrt{x+6} = x$ معناه $x^2 - x - 6 = 0$ ؛ $\Delta = 25$ ؛ $x' = -2$ ؛ $x' = 3$

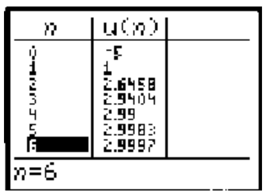
بما أن $x \in D_f$ فإن تقاطع $(C_f)$ و $(\Delta)$ هو النقطة ذات الإحداثيتين $(3;3)$.

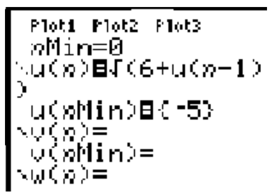
(7



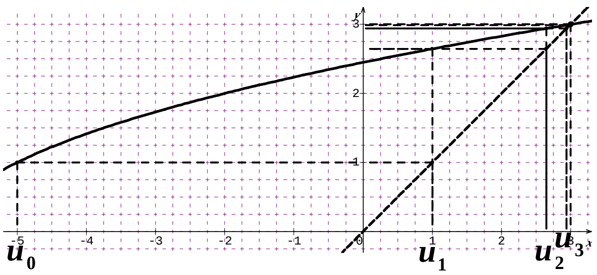
(1.$B$ $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n} = f(u_n)$ ، لدينا $u_1 > 0$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، إذا كان $u_n \in ]0;+\infty[$ فإن $f(u_n) \in ]0;+\infty[$

2) استعمال $TI\ 83\, plus$.




(3




4) تبدو المتتالية $(u_n)$ متزايدة.

5) من الجواب 2) تبدو المتتالية $(u_n)$ أنها تقترب من **3** .

(6 $u_{n+1} - u_n = \sqrt{6+u_n} - u_n = \dfrac{-u_n^2 + u_n + 6}{\sqrt{6+u_n} + u_n}$ ؛ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $\sqrt{6+u_n} + u_n > 0$ .

و $0 < u_n < 3$ إذن $-2 < u_n < 3$ ومنه $-u_n^2 + u_n + 6 > 0$ .

## النشاط الرابع

**تصحيح:** /

**الهدف:** مقاربة مفهوم متتاليتين متجاورتين.

**توجيهات:** يقدم النشاط كمدخل للفقرة " متتاليتان متجاورتان " و يتم ضمن أفواج مع استغلال جهاز الداتاشو قصد ملاحظ اتجاه تغير كل من المتتاليتين و تقاربهما.

**الحل:**

يمكن اعتبار الدالتين $f$ و $g$ المعرفتين على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{3x+2}{x+1}$ ؛ $g(x)=\dfrac{3x+10}{x+2}$ .

1) لدينا $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$ ومنه الدالة $f$ متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ إذن المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما.

2) لدينا $g'(x)=\dfrac{-4}{(x+2)^2}$ ومنه الدالة $g$ متناقصة تماما على $]0;+\infty[$ إذن المتتالية $(v_n)$ متناقصة تماما.

3) لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n+2}{n+1}-\dfrac{3n+10}{n+2}$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=3-3=0$ .

4) نلاحظ أن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=3$

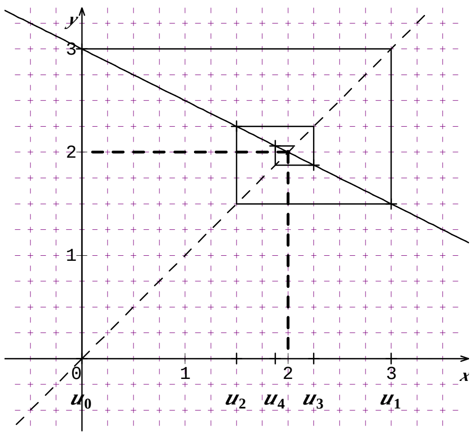
# الأعمال الموجهة

## دراسة متتالية تراجعية من الشكل $u_{n+1}=f(u_n)$

**الهدف:** دراسة اتجاه تغير و تقارب متتالية من الشكل $u_{n+1}=au_n+b$.

**توجيهات:** يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

**الحل:**




.1 1) المتتالية $(u_n)$ ليست رتيبة وتبدو أنّها تتقارب نحو 2 .

2)

3) $-\dfrac{1}{2}x+3=x$ معناه $x=2$ . إذن $\alpha=2$ .

ليكن $n\in\mathbb{N}$ ، $v_{n+1}=u_{n+1}-2=-\dfrac{1}{2}u_n+1$ أي :

$v_{n+1}=-\dfrac{1}{2}(v_n+2)+1=-\dfrac{1}{2}v_n$ وبالتالي $(v_n)$ هندسية.

لدينا $-1<-\dfrac{1}{2}<1$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n+2=2$ .

.2 1) إذا كان $a=0$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=b$.

ومنه إذا كان $u_0=b$ فإن $(u_n)$ ثابتة وإذا كان $u_0\neq b$ فإن $(u_n)$ تكون ثابتة ابتداء من الحد الثاني.

2) إذا كان $a=1$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=u_n+b$. إذن المتتالية $(u_n)$ حسابية أساسها $b$.

3) $a\neq 0$ و $a\neq 1$.

- الوضعية النسبية للمستقيمين $(D)$ و $(\Delta)$ تستنتج من إشارة العبارة $(a-1)x+b$.

إذا كان $a\in ]-\infty;0[\cup]0;1[$ فإن :

$(\Delta)$ يقع فوق $(D)$ لما يكون $x\in \left]-\infty;\frac{-b}{a-1}\right[$؛

و $(\Delta)$ يقع أسفل $(D)$ لما يكون $x\in \left]\frac{-b}{a-1};+\infty\right[$.

إذا كان $a\in ]1;+\infty[$ فإن :

$(\Delta)$ يقع أسفل $(D)$ لما يكون $x\in \left]-\infty;\frac{-b}{a-1}\right[$؛

و $(\Delta)$ يقع فوق $(D)$ لما يكون $x\in \left]\frac{-b}{a-1};+\infty\right[$.

- $\alpha=\frac{-b}{a-1}$.

- ليكن $n\in\mathbb{N}$ ، $v_{n+1}=u_{n+1}+\frac{b}{a-1}$ أي $v_{n+1}=au_n+b+\frac{b}{a-1}=a\left(v_n-\frac{b}{a-1}\right)+\frac{ba}{a-1}$ معناه $v_{n+1}=av_n$

إذن $(v_n)$ هندسية أساسها $a$.

4) $u_{n+1}=-u_n+b$ ؛ $u_0=u_0$؛ $u_1=-u_0+b$ ؛ $u_2=u_0$ ؛ $u_3=-u_0+b$ ؛ $u_4=u_0$ ؛ $u_5=-u_0+b$ ؛ $u_6=u_0$ .

نلاحظ أنّه من أجل كل $p\in\mathbb{N}$ : $u_{2p}=u_0$ و $u_{2p+1}=-u_0+b$

بصيغة أخرى من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ : $u_n=(-1)^n\left(u_0-\frac{b}{2}\right)+\frac{b}{2}$.

للبرهان على التخمين يمكن استعمال السؤال 3) لدينا $u_n=v_n+\alpha=v_n+\frac{b}{2}=v_0(-1)^n+\frac{b}{2}$ ؛ أي

$u_n=\left(u_0-\frac{b}{2}\right)(-1)^n+\frac{b}{2}$ .

## **متتالية متقاربة نحو العدد $e$**

**تصحيح:** /

**الهدف:** توظيف الدالة الأسية و المتتاليات.

**توجيهات:** يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

**الحل:**

1. 1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^x-(1+x)=+\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\frac{e^x}{x}-\frac{1+x}{x}\right]=+\infty$ .

$f'(x)=e^x-1$ ومنه جدول التغيرات :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | $0$ | + | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

1. 2) من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f(x)\geq 0$ معناه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $1+x\leq e^x\ldots(1)$

1. 3) بوضع $x=-X$ (1) تصبح $1-X \le e^{-X}$ وبفرض $X<1$ أي $1-X>0$ يكون $\frac{1}{e^{-X}} \le \frac{1}{1-X}$

أي $e^{X} \le \frac{1}{1-X}$ . وبالتالي إذا كان $x<1$ فإن $e^{x} \le \frac{1}{1-x} \ldots (2)$

2. 1) بوضع $x=\frac{1}{n}$ (1) تصبح $1+\frac{1}{n} \le e^{\frac{1}{n}}$ أي $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \le e$.

2. 2) بوضع $x=-(n+1)$ يكون $-(n+1)<1$ والمتباينة (2) تصبح $e^{-(n+1)} \le \frac{1}{n+2}$ إذن

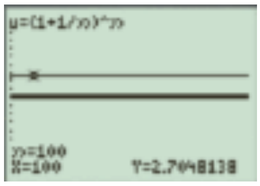
$e^{-(n+1)} \le \frac{1}{n+2} \le \frac{1}{n} \le \frac{1}{n}+1$ ومنه $e \le \left(\frac{1}{n}+1\right)^{n+1}$

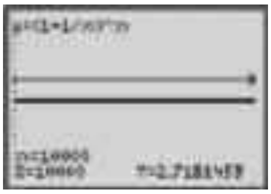
3. 1) لدينا $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \le e \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ معناه $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}-u_n \le e-u_n \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-u_n$ أي

$0 \le e-u_n \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\frac{1}{n}$ ولدينا $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \le e \le 3$ إذن $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\frac{1}{n} \le \frac{3}{n}$ وبالتالي $0 \le e-u_n \le \frac{3}{n}$.

3. 2) لدينا $\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n}=0$ إذن $\lim_{n\to+\infty} e-u_n=0$ وبالتالي $\lim_{n\to+\infty} u_n=e$ .

3. 3)





تطبيق

1) $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)!}$ ومنه $u_{n+1}-u_n>0$

2) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{n(n!)}-\frac{1}{(n+1)\left[(n+1)!\right]}$

$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{(n!)}\left[\frac{-1}{n(n+1)^2}\right]$ إذن $v_{n+1}-v_n<0$.

3) $\lim_{n\to+\infty}\left(v_n-u_n\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n(n!)}=0$ .

المتتاليتان $(u_n)$ و $(v_n)$ متجاورتان وبالتالي لهما نفس النهاية.

## حساب مساحة

**تصحيح:** /

**الهدف:** توظيف المتتاليتين المتجاورتين.

**توجيهات:** يقدم النشاط ضمن أفواج .

**الحل:** بسيط

## متتالية متقاربة نحو العدد $\ln(2)$

**تصحيح:** /

**الهدف:** توظيف الدالة اللوغاريتمية و المتتاليات.

**توجيهات:** يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

**<u>الحل:</u>**

الجزء الأول

1) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ ،

(2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 2 | u | 0,5 | 0,5833 | 0,6167 | 0,6345 | 0,6456 | 0,6532 | 0,6587 | 0,6629 |

الجزء الثاني

1) نعتبر الدالتين $g$ و $h$ حيث $g(x)=1-x+\ln x$ و $h(x)=1-\dfrac{1}{x}-\ln x$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)=-\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{1-x}{x}+\dfrac{\ln x}{x}\right)=-\infty$ .

$g'(x)=-1+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1-x}{x}$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

إذن من أجل كل $x \in ]0;+\infty[$ ، $g(x)\le 0$ معناه $1-x+\ln x \le 0$ أي $\ln x \le x-1$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} h(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 1-\dfrac{1}{x}(1+x\ln x)=-\infty$ ؛

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$ . $h'(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1-x}{x^2}$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

إذن من أجل كل $x \in ]0;+\infty[$ ، $h(x)\le 0$ معناه $1-\dfrac{1}{x}-\ln x \le 0$ أي $1-\dfrac{1}{x}\le \ln x$.

خلاصة $1-\dfrac{1}{x}\le \ln x \le x-1$.

2) ليكن $p$ عدد طبيعي **<u>غير معدوم</u>**.

نضع $x=\dfrac{p+1}{p}$ وبالتعويض في المتباينة السابقة نجد : $1-\dfrac{p}{p+1}\le \ln\dfrac{p+1}{p}\le \dfrac{p+1}{p}-1$ وهذا يعني $\dfrac{1}{p+1}\le \ln\dfrac{p+1}{p}\le \dfrac{1}{p}$.

3) (a $\dfrac{1}{n+1}\le \ln\dfrac{n+1}{n}\le \dfrac{1}{n}$ ؛ $\dfrac{1}{n+2}\le \ln\dfrac{n+2}{n+1}\le \dfrac{1}{n+1}$ ؛ … ؛ $\dfrac{1}{2n}\le \ln\dfrac{2n}{2n-1}\le \dfrac{1}{2n-1}$.

(b الطرف 1 : $u_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{2n}$. الطرف 2 : $\ln 2=\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\times\dfrac{n+2}{n+1}\times\ldots\times\dfrac{2n}{2n-1}\right)$.

الطرف3: $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{2n-1}=\dfrac{1}{n}+u_n-\dfrac{1}{2n}$ أي $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{2n-1}=u_n+\dfrac{1}{2n}$

إذن $u_n \le \ln 2 \le u_n + \frac{1}{2n}$.

4) المتباينة السابقة تكافئ $0 \le \ln 2 - u_n \le \frac{1}{2n}$ ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n}=0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\ln 2 - u_n\right)=0$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$ .

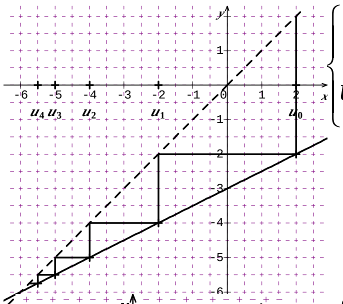
# التمارين

## التمارين التطبيقية

### 1 - تذكير بالمتتاليات العددية.

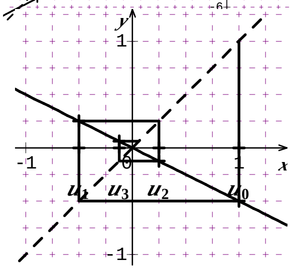
**1** أ - $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-3 \end{cases}$

متناقصة تماما.



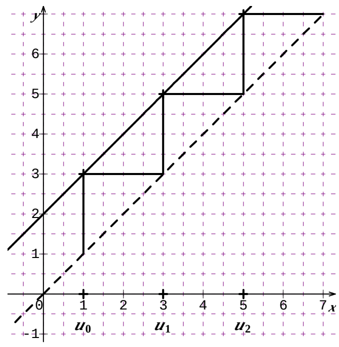

ب - $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n \end{cases}$ .

ليست رتيبة .




جـ - $\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=u_n+2 \end{cases}$ .

متزايدة تماما.




**2** $v_{n+1}-v_n=\frac{3}{5}r$

و $w_{n+1}-w_n=u_{3n+3}-u_{3n}=u_{3n}+3r-u_{3n}=3r$.

**3** لدينا $(90-2r)+(90-r)+90=180$ ومنه $3r=90$ أي $r=30$ إذن الأقياس هي $30^\circ$، $60^\circ$ و $90^\circ$.

**4** 1) استعمال التراجع.

2) لدينا $u_{n+1}=\frac{1}{v_{n+1}}=\frac{v_n+1}{v_n}=1+\frac{1}{v_n}=1+u_n$ إذن $(u_n)$ حسابية أساسها 1.

**5** $u_7=u_3+4r$ معناه $r=\frac{u_7-u_3}{4}$ أي $r=6$ ؛ $u_{17}=u_3+14r=97$.

**6** 1) $u_n=u_1+3(n-1)=3n-5$ .

2) $u_1+u_2+...+u_{20}=\frac{20}{2}(u_1+u_{20})$ ولدينا $u_{20}=55$ إذن $u_1+u_2+...+u_{20}=530$.

**7** $S=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}+...+10$.

$S$ هو مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $a_1=\frac{1}{2}$ ؛ $a_n=a_1+(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}n$

إذن $a_n=10$ معناه $n=20$ وبالتالي $S=\frac{20}{2}\left(\frac{1}{2}+10\right)$

أي $S=105$.

**8** $u_{n+1}=\frac{5^{n+1}}{7^{n+2}}=\frac{5^n\times5}{7^{n+1}\times7}=\frac{5^n}{7^{n+1}}\times\frac{5}{7}=u_n\times\frac{5}{7}$.

**9** $q^3=\frac{u_{10}}{u_7}=\left(\frac{18}{11}\right)^3$ ؛ $q=\frac{18}{11}$ ؛ $u_{30}=u_{10}\times q^{20}$

أي $u_{30}=\frac{27\times18^{20}}{11^{23}}$

**10** 1) $u_n=-2\times3^{n-1}$.

2) $u_1+u_2+...+u_7=(-2)\frac{3^7-1}{3-1}=-2186$.

3) $v_{n+1}=u_{2n+2}=u_{2n}\times3^2=9v_n$.

إذن $(v_n)$ هندسية أساسها 9 وحدها الأول $v_1=u_2=-6$

$v_1+v_2+...+v_n=(-6)\frac{9^n-1}{9-1}=-\frac{3}{4}(9^n-1)$.

**11** 1) $u_3=9u_1$ معناه $u_1\times q^2=9u_1$ أي $q^2=9$ لأن $u_1>0$ وعليه $q=3$ أو $q=-3$ وبما أن كل الحدود موجبة تماما فإن $q=3$.

2) $u_n = u_0 \times q^n = 2\times 3^n$.

3) $s_n = u_0 \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1} = 3^{n+1}-1$.

## 2 - الاستدلال بالتراجع .

**12** $p(0)$ تعني $0=\dfrac{0(0+1)}{2}$.

إذا كانت $1+2+...+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ فإن

$$1+2+...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}$$

أي $1+2+...+k+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

**13** $p(0)$ تعني $0^2=\dfrac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6}$.

إذا كانت $1^2+2^2+...+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ فإن

$$1^2+2^2+...+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$$

$$=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

**14** $p(0)$ تعني $0^3=\dfrac{0^2(0+1)^2}{4}$.

إذا كانت $1^3+2^3+...+k^3=\dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$ فإن

$$1^3+2^3+...+k^3+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}$$

$$=\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}$$

**15** أ) $p(1)$ تعني $u_1>1$ أي $2>1$.

$u_k>1$ معناه $\sqrt{u_k}>\sqrt{1}$ ومعناه $u_{k+1}>1$.

ب) $p'(1)$ تعني $u_2\le\dfrac{3}{2}$ أي $\sqrt{2}\le\dfrac{3}{2}$.

إذا كان $u_{k+1}\le\dfrac{3}{2}$ فإن $u_{k+1}\le\dfrac{9}{4}$ ومنه $\sqrt{u_{k+1}}\le\sqrt{\dfrac{9}{4}}$

مع الملاحظة أن $u_{k+1}>1$ إذن $u_{k+2}\le\dfrac{3}{2}$ .

**16** $p(n)$ هي الخاصية " $u_n=3$ "

$p(0)$ تعني $u_0=3$.

إذا كانت $u_k=3$ فإن $u_{k+1}=\sqrt{6+u_k}=\sqrt{9}=3$.

**17** 1) $p(0)$ تعني $0<u_0<1$

$0<u_k<1$ معناه $0^2<u_k{}^2<1^2$ أي $0<u_{k+1}<1$ .

2) $u_{n+1}-u_n=u_n(u_n-1)$ بما أن $0<u_n<1$ فإن

$u_n>0$ و $u_n-1<0$ إذن $u_{n+1}-u_n<0$.

**18** $p(0)$ تعني $2^0-1$ مضاعف لـِ 7 .

لدينا $2^{3k}-1=7\alpha$ معناه $2^{3k}=7\alpha+1$ .

$2^{3(k+1)}-1=8\times 2^{3k}-1=8\times(7\alpha+1)-1$ أي

$2^{3(k+1)}-1=7\times(8\alpha+1)$ .

**19** $p(0)$ تعني $3^0-1$ مضاعف لـِ 8 .

لدينا $3^{2k}-1=8\alpha$ معناه $3^{2k}=8\alpha+1$ .

$3^{2(k+1)}-1=9\times 3^{2k}-1=9\times(8\alpha+1)-1$ أي

$3^{2(k+1)}-1=8\times(9\alpha+1)$ .

**20** $p(n)$ هي " $\mathbf{3^{2n}-2^n}$ مضاعف للعدد 7 "

$p(0)$ هي الخاصية $3^0-2^0$ مضاعف لـِ 7 .

$3^{2n}-2^n=7\alpha$ معناه $3^{2n}-2^n=7\alpha+2^n$ .

$3^{2(n+1)}-2^{n+1}=9\times 3^{2n}-2\times 2^n$ أي

$$3^{2(n+1)}-2^{n+1}=9\left(7\alpha+2^n\right)-2\times 2^n=7\left(9\alpha+2^n\right)$$

يمكن اعتبار $p(n)$ هي " $\mathbf{3^{2n+1}+2^{n+2}}$ مضاعف للعدد 7 ".

**21** $p(0)$ تعني $0^3-2\times 0$ يقبل القسمة على 3 .

نفرض أن $n^3+2n=3\alpha$

لدينا $(n+1)^3+2(n+1)=n^3+3n^2+3n+2n+3$

أي $(n+1)^3+2(n+1)=3\alpha+3n^2+3n+3$ .

**22** 1) لدينا $10^n+1=9\alpha$ معناه $10^n=9\alpha-1$ أي

$10^{n+1}=90\alpha-10$ ومعناه $10^{n+1}=9(10\alpha-1)-1$.

2) من أجل $n=0$ ، $10^0+1=2$ و 2 ليس مضاعف لـِ 9 .

## 3 - تقارب متتالية عددية .

**23** لدينا $-10^{-3}<u_n<10^{-3}$ معناه $0<\frac{1}{n\sqrt{n}}<10^{-3}$

ومعناه $n\sqrt{n}>\frac{1}{10^{-3}}$ ويكافئ $n^3>10^6$ أي $n>10^2$ .

**24** $u_n>10^6$ معناه $n\sqrt{n}>10^6$ ومعناه $n^3>10^{12}$

أي $n>10^4$ .

**25** لدينا $u_n=\frac{3}{2^n}$ ؛ $u_n<10^{-5}$ معناه $2^n>3\times10^5$

أي $n>\frac{3\times10^5}{\ln 2}$ إذن ابتداء من الدليل 432809 .

**26** لدينا $u_n=3^n$ ؛ $u_n>10^{12}$ معناه $3^n>10^{12}$ أي

$n>\frac{10^{12}}{\ln 3}$ إذن ابتداء من الدليل 910239226627 .

**27** (1 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n+2}{2n-1}=\frac{3}{2}$ . (2 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5n-2}{4n-3}=\frac{5}{4}$ .

(3 $\lim\limits_{n\to+\infty}2n-\frac{2}{n+1}=+\infty$ .

(4 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{3}-4+\frac{n+2}{n^2+1}=+\infty$ .

**28** (1 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{7n^2-3n+2}{n^2-n+1}=7$ .

(2 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-n^2+4n+2}{(n+2)^2}=-1$ .

(3 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-3n+12}{n^2+1}=0$ . (4 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+2n}{4n+3}=+\infty$ .

**29** (1 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{3n+2}{2n+1}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$ .

(2 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n^2+2}{n+3}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$ .

(3 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}+2}{2n+1}=0$ .

(4 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n\sqrt{n}+n}{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\left(\sqrt{n}+1\right)=+\infty$ .

**30** (1 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{3\pi n+2}{2n+\pi}\right)=\sin\frac{3\pi}{2}=-1$ .

(2 $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{-3\pi n+2}{n+2\pi}\right)=\cos(-3\pi)=-1$ .

(3 $u_n=\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{17}$ . لدينا $-\frac{1}{n}\le u_n\le\frac{1}{n}$ ،

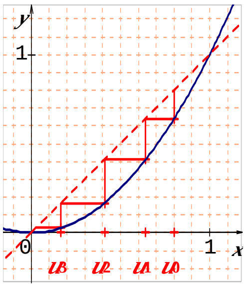
بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{1}{n}=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ .

**31** (1 تقاطع $\mathscr{C}$ و $\Delta$ هما النقطتان $O(0;0)$ و $A(1;1)$ .

(2 $f$ متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ إذن $(u_n)$ متزايدة تماما.

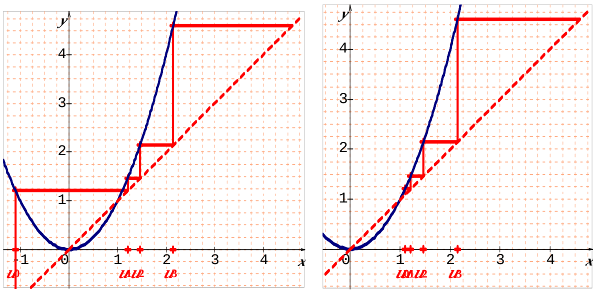
$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ومنه $(u_n)$ متباعدة.

(3 في حالة $v_0=0,8$ نلاحظ أن المتتالية $(v_n)$ متناقصة تماما وتتقارب نحو 0



في حالة $v_0=-1,1$ نلاحظ أن المتتالية $(v_n)$ متزايدة تماما و $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$

في حالة $v_0=1,1$ نلاحظ أن المتتالية $(v_n)$ متزايدة تماما و $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$



(4 لدينا $f(0)=0$ و $f(1)=1$ إذن باختيار $v_0=0$ أو $v_0=1$ فتكون $(v_n)$ ثابتة .

## 4 - المتتاليات المحدودة .

**32** لدينا $u_{10^4}=5-\frac{10}{10^8}=5-10^{-7}=4,9999999$

ومنه $u_{10^4}>4,99999$ إذن العددين 0 و 4,99999 ليس عنصرين حدان من الأعلى للمتتالية $(u_n)$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ , $-\frac{10}{n^2}<0$

ومنه $u_n<5$ وبالتالي 5 و 6 هما عنصران حادان من الأعلى للمتتالية.

**33** أ - لدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $-1\le\sin\left(\frac{n\pi}{7}\right)\le1$

إذن $(u_n)$ محدودة بـ $-1$ و 1 .

**ب -** لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $1 < 1 + \frac{1}{n^2} \le 2$ إذن $(u_n)$ محدودة بـ 1 و 2.

**جـ -** لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $1 < 1 + \frac{1}{n+2} < 2$ إذن $(u_n)$ محدودة بـ 1 و 2.

**د -** لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $0 < \frac{1}{1+n^2} \le 1$ إذن $(u_n)$ محدودة بـ 0 و 1.

**34** أ - $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ ؛ $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ؛

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ ↗ | $1$ |

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $0 \le u_n < 1$.

ب - $u_n = \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2+1}}$ ؛ $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$ ؛

$f'(x) = \frac{4x}{2(x^2+1)}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$.

| $x$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ ↗ | $1$ |

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $0 \le u_n < 1$.

جـ - $u_n = \frac{-3}{\sqrt{3n+2}}$ ؛ $f(x) = \frac{-3}{\sqrt{3x+2}}$

$$f'(x) = \frac{9}{2(3x+2)\sqrt{3x+2}}$$

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\frac{-3\sqrt{2}}{2}$ ↗ | $0$ |

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $\frac{-3\sqrt{2}}{2} \le u_n < 0$.

**35** أ - $u_n = 2^n$ ؛ $(u_n)$ متتالية متزايدة إذن محدودة من الأسفل بـ $u_0 = 1$ وبما أنها غير متقاربة أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ فإنها غير محدودة من الأعلى.

ب - $u_n = n\sqrt{3} - 2$ ؛ $(u_n)$ متتالية حسابية متزايدة إذن محدودة من الأسفل بـ $u_0 = -2$ وبما أنها غير متقاربة أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ فإنها غير محدودة من الأعلى.

جـ - $u_n = n^2 + n - 1$ ؛ $f(x) = x^2 + x - 1$ ؛

$f'(x) = 2x + 1$

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-1$ ↗ | $+\infty$ |

$(u_n)$ محدودة من الأسفل بـ $u_0 = -1$ فقط.

**36** أ - $u_n = \frac{1}{n+1} + n^2$ ؛ من أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_n > n^2 \ge 0$ إذن $(u_n)$ محدودة من الأسفل وغير محدودة من الأعلى.

ب - $u_n = n + \cos n$ ؛ $f(x) = x + \cos x$ ؛

$f'(x) = 1 - \sin x$ ولدينا $1 - \sin x \ge 0$.

بما أن $x - 1 \le x + \cos x$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ ↗ | $+\infty$ |

$(u_n)$ محدودة من الأسفل بـ $u_0 = 1$ فقط.

جـ - $u_n = (-1)^n \times n^2$ ؛ إذا كان $n$ زوجيا فإن $u_n = n^2$ وبالتالي $(u_n)$ ليست محدودة من الأعلى؛ وإذا كان $n$ فرديا فإن $u_n = -n^2$ وبالتالي $(u_n)$ ليست محدودة من الأسفل.

**37** 1) $f(x)=x^2-5x+6$ ؛ $f'(x)=2x-5$ .

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{5}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | - | 0 | + |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $\frac{1}{4}$ | ↗ $+\infty$ |

2) الدالة $f$ متزايدة تماما على $[4;+\infty[$ إذن من أجل كل $x\geq 4$ ، $f(x)\geq f(4)$ أي $x^2-5x+6\geq 2$ .

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي $n$ أكبر من أو يساوي 4 ، $n^2-5n+6\geq 2$ وهذا يعني $\frac{1}{n^2-5n+6}\leq\frac{1}{2}$ .

## 5 - المتتاليتان المتجاورتان .

**38** $u_n=\frac{-1}{2n+4}$ و $v_n=\frac{1}{n+1}$ ؛ من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2(n+2)(n+3)}$

و $v_{n+1}-v_n=\frac{-1}{(n+1)(n+2)}$ إذن $(u_n)$ متزايدة

و $(v_n)$ متناقصة ، ولدينا $u_n-v_n=\frac{-3n-5}{2n^2+6n+4}$ إذن

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$ وبالتالي $(u_n)$ و $(v_n)$ متجاورتين.

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$

**39** $u_n=\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}$ و $v_n=1+\frac{1}{n^2}$ ؛

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n(n+1)}$ إذن $(u_n)$ متزايدة.

$v_{n+1}-v_n=\frac{-(2n+1)}{n^2(n+1)^2}$ إذن $(v_n)$ متناقصة.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=0$ .

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=1$ .

**40** أ - $u_n=\frac{2n-3}{n+1}$ ؛ $u_{n+1}-u_n=\frac{5}{(n+1)(n+2)}$

ومنه $(u_n)$متزايدة.

$v_n=\frac{2n+3}{n+1}$ ؛ $v_{n+1}-v_n=\frac{-1}{(n+2)(n+1)}$ ومنه

$(v_n)$ متناقصة. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-6}{n+1}=0$

إذن $(u_n)$ و $(v_n)$ متجاورتان .

ب - $u_n=3+\frac{(-1)^n}{n}$ ؛ $u_{n+1}-u_n=\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{n+1}$

ومنه $(u_n)$ ليست رتيبة وبالتالي $(u_n)$ و $(v_n)$ غير متجاورتين .

**41** $u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}$ ؛

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$ إذن $(u_n)$ متزايدة.

$v_n=u_n+\frac{1}{n}$ ؛ $v_{n+1}-v_n=\frac{-3n-2}{2n(n+1)(2n+1)}$

إذن $(v_n)$ متناقصة. $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ .

**42** $u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}$ ؛

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$ إذن $(u_n)$ متزايدة.

$v_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n-1}$ ؛

$v_{n+1}-v_n=\frac{-1}{2n(2n+1)}$ إذن $(v_n)$ متناقصة.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{1}{n}=0$ .

**43** $u_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}$ ؛

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)^2}$ إذن $(u_n)$ متزايدة.

$v_n=u_n+\frac{1}{n}$ ؛ $v_{n+1}-v_n=\frac{-1}{n(n+1)^2}$ إذن $(v_n)$

متناقصة. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{1}{n}=0$ .

**44** $u_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n+1}$ ؛

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}\left(2n+3+2\sqrt{(n+2)(n+1)}\right)}$

ومنه $(u_n)$ متزايدة.

$v_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ ؛

$v_{n+1} - v_n = \frac{-2n^2 - 2n - 1}{\sqrt{n+1}\left(2\sqrt{n(n+1)} + (2n+1)\right)}$ ومنه

$(v_n)$ متناقصة.

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{-2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 0$$

## تمارين للتعمّق

### 1 - تذكير بالمتتاليات العددية .

**45** $u_n = \frac{\ln n}{n}$ ؛ ليكن $n$ عدد طبيعي غير معدوم ؛

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ؛ $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x) \le 0$ معناه $x \ge e$ ؛ إذن $f$ متناقصة تماما على $[e;+\infty[$ وبالتالي $(u_n)$ متناقصة ابتداء من الرتبة 3.

**46** $u : n \mapsto \frac{5^n}{n!}$ ؛ كل حدود $u$ موجبة تماما ؛ ولدينا

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5}{n+1}$ ؛ $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ معناه $\frac{5}{n+1} < 1$ أي $n > 4$

إذن المتتالية $u$ تكون متناقصة ابتداء من الدليل 5 أي الرتبة السادسة.

**47** $u : n \mapsto \frac{n!}{7^n}$ ؛ $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{7}$ ؛ $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ معناه $n > 6$ إذن $u$ تكون متزايدة ابتداء من الدليل 7 أي الرتبة الثامنة.

**48** $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$ ؛

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!}$ إذن $u_{n+1} - u_n > 0$.

$v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{(n!)n(n+1)^2}$ إذن $v_{n+1} - v_n < 0$.

**49** 1) أ ـ $\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 24 \\ v_4 + v_5 + v_6 + v_7 = 74 \end{cases}$ معناه

$\begin{cases} v_1 + r = 8 \\ 2v_1 + 9r = 37 \end{cases}$ أي $\begin{cases} v_1 = 5 \\ r = 3 \end{cases}$ .

ب ـ $v_n = 3n + 2$ ؛ $v_n > 6023$ معناه $n > 2007$

وبالتالي أصغر عدد طبيعي $n$ هو 2008 .

2) $2S_n = n(3n+7)$ معناه $n(u_1 + u_n) = n(3n+7)$

أي $(d-3)n - d + 2u_1 - 7 = 0$ إذن $d = 3$ و $u_1 = 5$.

**50** $(u_n)$ متتالية حسابية أساسها $-5$ و $u_0 = -4$ .

1) $u_n = -5n - 4$ .

2) $S = u_{26} + u_{27} + ... + u_{125} = 50(u_{26} + u_{125})$ أي

$S = 50(-5\times 26 - 4 - 5\times 125 - 4) = -38150$

**51** $u_0 = 2$ ، $4u_{n+1} - 2u_n = 9$ ، $v_n = 2u_n - 9$

أ - $u_1 = 3,25$ ، $u_2 = 3,875$ و $u_3 = 4,1875$ .

$v_0 = -5$ ، $v_1 = -2,5$ ، $v_2 = -1,25$ و $v_3 = -0,625$.

ب - $v_{n+1} = 2u_{n+1} - 9 = u_n - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}v_n$

جـ - $v_n = -5\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ؛ $u_n = -5\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{9}{2}$.

د - $v_0 + v_1 + ... + v_n = 10\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right]$ ؛

$u_0 + u_1 + ... + u_n = 5\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right] - \frac{9}{2}(n+1)$ .

**52** $u_0 = 14$ ، $u_{n+1} = 4u_n + 3$ ، $v_n = u_n + 1$.

1) $v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 4(u_n + 1) = 4v_n$ إذن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها 4 وحدها الأول $v_0 = u_0 + 1 = 15$.

2) $v_n = 15\times 4^n$ ؛ $u_n = 15\times 4^n - 1$.

3) $S_n = u_0^2+u_1^2+...+u_n^2$ ؛ لدينا
ومنه $u_n^2 = 225\times 4^{2n} - 30\times 4^n +1$

$$S_n = 225\left(4^0+4^2+...+4^{2n}\right)$$
$$-30\left(4^0+4^1+...+4^n\right)+n+1$$

$.S_n = 15\times 4^{2(n+1)} - 10\times 4^{n+1}+n-4$

**53** $(u_n)$ متتالية هندسية أساسها 3 و $u_0=\frac{2}{9}$

$$S = u_3+u_4+...+u_{10} = u_3\frac{3^8-1}{2} = \frac{2}{9}\times 3^3\times\frac{3^8-1}{2}$$

أي $S=19680$.

**54** $S = 0,02-0,1+0,5-2,5+...+312,5$ ؛
مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها $-5$ ؛
بوضع $u_1=0,02$ يكون $u_n = 0,02(-5)^{n-1}$
$u_n=312,5$ معناه $(-5)^{n-1}=15625$ أي $n=7$ .

$$.S=0,02\frac{(-5)^7-1}{-6} = -52,08$$

**55** $u_n = 2\times 3^n+3\times 4^n$ . $s_n = u_0+u_1+...+u_n$

$$.s_n = 2\frac{3^{n+1}-1}{2}+3\frac{4^{n+1}-1}{3} = 3^{n+1}+4^{n+1}-2$$

**56** $u_1=1$ ، $u_{n+1}=2u_n+3$ ، $v_n=u_n+3$
1) $v_{n+1}=u_{n+1}+3=2u_n+6=2v_n$ إذن $(v_n)$ هندسية أساسها 2 .
- $v_n = 4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$ ؛ $u_n=2^{n+1}-3$.

2) $.s_n = v_1\frac{2^n-1}{2-1}=2^{n+2}-4$
- $u_1+u_2+...+u_n+3n = v_1+v_2+...+v_n$ أي
. $u_1+u_2+...+u_n+3n = 2^{n+2}-4=4\left(2^n-4\right)$

**57** $u_0=\frac{1}{6}$ ، $u_{n+1}=\frac{1}{4} u_n-\frac{5}{8}$ ، $.v_n = 2u_n+\frac{5}{3}$

1) $u_1=-\frac{7}{12}$ ، $u_2=-\frac{37}{48}$ و $u_3=-\frac{157}{192}$ . $v_0=2$ ،
$v_1=\frac{1}{2}$ و $v_2=\frac{1}{8}$ .

2) $v_{n+1} = 2u_{n+1}+\frac{5}{3} = \frac{1}{2} u_n+\frac{5}{12} = \frac{1}{4} v_n$ إذن $(v_n)$ هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ . - $v_n=\frac{2}{4^n}$ ؛ $u_n = \frac{1}{4^n}-\frac{5}{6}$ .

3) أحسب بدلالة $n$ كلا من $s_n$ و $t_n$ حيث :

$$s_n = v_0+v_1+...+v_n = 2\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{4}-1} = -\frac{2}{3\times 4^n}+\frac{8}{3}$$ ،

لدينا $u_n=\frac{1}{2} v_n-\frac{5}{6}$ ومنه $.t_n = -\frac{1}{3\times4^n}-\frac{5}{6} n+\frac{1}{2}$

**58** من أجل كل $n\ge1$ : $\begin{cases} u_0=2\ ,\ u_1=4 \\ u_{n+1}=4u_n-u_{n-1} \end{cases}$ .

1) $\begin{cases} a+b=4 \\ ab=1 \end{cases}$ ؛ $a$ و $b$ هما حلا المعادلة
$x^2-4x+1=0$ إذن $(a;b)=\left(2-\sqrt3;2+\sqrt3\right)$ أو
. $(a;b)=\left(2+\sqrt3;2-\sqrt3\right)$

2) $v_n = u_{n+1}-au_n$ ؛ ليكن $n$ عددا طبيعيا ،
$v_{n+1}=u_{n+2}-au_{n+1}=4u_{n+1}-u_n-au_{n+1}$ أي
$v_{n+1}=(4-a)u_{n+1}-u_n = bu_{n+1}-abu_n$ أي
$v_{n+1}=bv_n$ إذن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $b$ .

3) $w_n=u_{n+1}-bu_n$ ؛ ليكن $n$ عددا طبيعيا ،
$w_{n+1}=u_{n+2}-bu_{n+1}=4u_{n+1}-u_n-bu_{n+1}$
أي $w_{n+1}=(4-b)u_{n+1}-u_n = au_{n+1}-abu_n$
$w_{n+1}=aw_n$ إذن $(w_n)$ متتالية هندسية أساسها $a$ .

4) $v_0=u_1-au_0=4-2a=b-a$
و $w_0=u_1-bu_0=4-2b=a-b$
$v_n=v_0b^n=(b-a)b^n$ و $w_n=w_0a^n=(a-b)a^n$
لدينا : $v_n=u_{n+1}-au_n$ و $w_n=u_{n+1}-bu_n$ إذن
$w_n-v_n=-bu_n+au_n=(a-b)u_n$ ومنه

$$.u_n=\frac{w_n-v_n}{a-b}=a^n+b^n=\left(2+\sqrt3\right)^n+\left(2-\sqrt3\right)^n$$

**59** $a$ ، $b$ و $c$ أعداد حقيقية غير معدومة .

1) $(a+b+c)(a-b+c)=a^2+2ca-b^2+c^2$
بما أن $b^2=ac$ فإن $2b^2=2ac$ ، ومنه
$(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$

2) لدينا $\begin{cases} a+b+c=78 \\ a^2+b^2+c^2=3276 \end{cases}$ معناه

أي $\begin{cases} a+b+c=78 \\ (a+b+c)(a-b+c)=3276 \end{cases}$

$\begin{cases} a+b+c=78 \\ a-b+c=42 \end{cases}$ إذن $2b=78-42=36$ أي $b=18$.

$\begin{cases} a+c=60 \\ ac=18^2=324 \end{cases}$ ؛ $a$ و $c$ هما حلا المعادلة ذات

المجهول $x$ التالية : $x^2-60x+324=0$ . إذن

$(a;b;c)=(6;18;54)$ أو $(a;b;c)=(54;18;6)$.

**60** $a$ ، $b$ و $c$ ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية .

$b^3=343$ أي $b=7$ .

$\begin{cases} a+c=29,75 \\ ac=49 \end{cases}$ . $x^2-29,75x+49=0$

$(a;b;c)=\left(28;7;\frac{7}{4}\right)$ أو $(a;b;c)=\left(\frac{7}{4};7;28\right)$.

**61** لدينا $b=qa$ و $c=q^2a$ ؛ $3a+c=4b$ إذن

$3a+q^2a=4qa$ بما أن $a\neq 0$ فإن $q^2-4q+3=0$

أي $q=1$ أو $q=3$.

**62** 1) ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ ، $v_{n+1}=13u_{n+1}-4$ معناه

$$v_{n+1}=13\left(\frac{4}{10}-\frac{3}{10}u_n\right)-4=\frac{12}{10}-\frac{39}{10}\times\frac{v_n+4}{13}$$

أي : $v_{n+1}=\frac{12}{10}-\frac{3}{10}v_n+\frac{12}{13}=-\frac{3}{10}v_n$ وبالتالي

$(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $q=-\frac{3}{10}$ .

2) $v_n=v_1\times q^{n-1}$ ومنه $v_n=(13a-4)\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$

$$u_n=\frac{v_n+4}{13}=\frac{1}{13}\left[(13a-4)\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}+4\right]$$

أي $u_n=\frac{(13a-4)}{13}\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}+\frac{4}{13}$ .

3) $s_n=u_1+u_2+...+u_n$ معناه

$s_n=\frac{1}{13}(v_1+4+v_2+4+...+v_n+4)$ ومعناه

أي $s_n=\frac{1}{13}(v_1+v_2+...+v_n+4n)$

$s_n=\frac{v_1}{13}\times\frac{q^n-1}{q-1}+\frac{4n}{13}$ ؛

$$s_n=-\frac{10}{13}\left(a-\frac{4}{13}\right)\left[\left(-\frac{3}{10}\right)^n-1\right]+\frac{4n}{13}$$

**63** $\alpha_1=3$ ؛ $\alpha_3+\alpha_5=\frac{15}{16}$ .

1) $q=\frac{1}{2}$ .

2) $s_n=\alpha_1\frac{q^n-1}{q-1}=-6\left(\frac{1}{2}\right)^n+6$

ليكن $n$ عدد طبيعي غير معدوم ،

$$\beta_{n+1}-\beta_n=\ln(\alpha_{n+1})-\ln(\alpha_n)=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$$

وبالتالي $(\beta_n)$ هي متتالية حسابية أساسها $-\ln 2$

ب - $t_n=\frac{n}{2}(\beta_1+\beta_n)=\frac{n}{2}(2\beta_1-(n-1)\ln 2)$

$$t_n=\frac{n}{2}\left(2\ln 3-\ln 2^{n-1}\right)=\frac{n}{2}\ln\frac{9}{2^{n-1}}$$

**64** لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ،

$A_n=\underbrace{11...1}_{n\text{ رقم}}$ ومنه $9A_n=\underbrace{99...9}_{n\text{ رقم}}$ ومنه

$$9A_n+1=1\underbrace{00...0}_{n\text{ رقم}}=10^n$$

المتتالية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_n=10^n$ هي هندسية

أساسها 10 . ولدينا : $A_n=\frac{1}{9}(10^n-1)=\frac{1}{9}(u_n-1)$

ومنه $s_n=\frac{1}{9}(u_1-1)+\frac{1}{9}(u_2-1)+...+\frac{1}{9}(u_n-1)$

$s_n=\frac{10}{81}(10^n-1)-\frac{1}{9}n$ .

**65** $u_n=10^n$ و $A_n=\frac{1}{3}(u_n-1)$

وعليه $s_n=\frac{1}{3}\left[(u_1+u_2+...+u_n)-n\right]$ ؛

$$s_n=\frac{1}{3}\left[u_1\frac{10^n-1}{9}-n\right]=\frac{10}{27}(10^n-1)-\frac{1}{3}n$$

**66** $u_0=5$ ، $u_{n+1}=5u_n-7n$ ؛

$v_n=u_n-\frac{7}{4}n-\frac{7}{16}$ .

1) النتائج المحصل عليها مع حساب $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 5 | 25 | 118 | 576 | 2859 | 14267 | 71300 | 356458 | 1782241 |
| $v_n$ | 4.5625 | 22.81 | 114.06 | 570.31 | 2851.56 | 14257,81 | 71289,1 | 356445,313 | 1782226,56 |
| | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |

يبدو أن المتتالية $(v_n)$ هندسية ذات الأساس 5 .

2) ليكن $n$ عدد طبيعي ، $v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{7}{4}(n+1)-\frac{7}{16}$

$v_{n+1}=5v_n$ إذن المتتالية $(v_n)$ هندسية ذات الأساس 5.

$v_n=v_0\times 5^n$ ومنه $v_n=\frac{73}{16}\times 5^n$ ؛

$u_n=\frac{73}{16}\times 5^n+\frac{7}{4}n+\frac{7}{16}$ .

3) $s_n=u_0+u_1+...+u_n$ ، ولدينا

$u_n=v_n+\frac{7}{4}n+\frac{7}{16}$ ،

$$s_n=\left(v_0+\frac{7}{16}\right)+\left(v_1+\frac{7}{4}+\frac{7}{16}\right)+...+\left(v_n+\frac{7}{4}n+\frac{7}{16}\right)$$

$$s_n=(v_0+v_1+...+v_n)+\frac{7}{4}(1+2+...+n)+\frac{7}{16}(n+1)$$

$$s_n=v_0\frac{5^{n+1}-1}{4}+\frac{7n(n+1)}{8}+\frac{7}{16}(n+1)$$ ؛

$$s_n=\frac{73}{64}\left(5^{n+1}-1\right)+\frac{7}{16}\left(2n^2+3n+1\right)$$ .

**67** $u_0=-2$ ، $u_{n+1}=\alpha u_n+\beta$ ، $\alpha$ و $\beta$ عددان حقيقيان غير معدومين ويختلفان عن 1 .

1) من أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_n=u_0=-2$ ومنه العلاقة $u_{n+1}=\alpha u_n+\beta$ تصبح $-2=-2\alpha+\beta$ أي :

$\beta=2\alpha-2$ .

2) أ - ليكن $n$ عددا طبيعيا ، $v_{n+1}=u_{n+1}+\gamma$ .

$$v_{n+1}=\alpha u_n+\beta+\gamma=\alpha(v_n-\gamma)+\beta+\gamma$$

$$v_{n+1}=\alpha v_n-\alpha\gamma+\beta+\gamma=\alpha v_n-\gamma(\alpha-1)+\beta$$

إذن لكي تكون المتتالية $(v_n)$ هندسية يجب أن يكون

$-\gamma(\alpha-1)+\beta=0$ أي : $\gamma=\frac{\beta}{\alpha-1}$ .

ب - $\alpha=3$ , $\beta=2$ و $\gamma=1$ العلاقة $\gamma=\frac{\beta}{\alpha-1}$ محققة

وبالتالي $(v_n)$ هندسية أساسها $\alpha=3$ حدها الأول

$v_0=-1$ ؛ ومنه $s_n=v_0\frac{3^n-1}{3-1}=-\frac{3^n}{2}+\frac{1}{2}$ .

لدينا $v_n=u_n+1$ معناه $u_n=v_n-1$ ومنه

$$t_n=(v_0-1)+(v_1-1)+...+(v_n-1)=s_n-(n+1)$$

$t_n=-\frac{3^n}{2}-n-\frac{1}{2}$ .

## 2 - الاستدلال بالتراجع .

**68** 1) أ - $s_1=1$ ، $s_2=5$ ، $s_3=14$ و $s_4=30$.

ب - $s_{n+1}=s_n+(n+1)^2$.

2) $p(1)$ هي الخاصية $s_1=\frac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6}$

إذا كان $s_k=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ فإن

$s_{k+1}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$ أي

$s_{k+1}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

**69** 1) $t_1=1\times 2=2$ ، $t_2=t_1+2\times 3=8$،

$t_3=t_2+3\times 4=20$ و $t_4=t_3+4\times 5=40$ .

$t_{n+1}=t_n+(n+1)(n+2)$.

2) $p(1)$ تعني $t_1=\frac{1}{3}\times 1(1+1)(1+2)$ و هي صحيحة.

إذا كانت $t_k=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$ فإن

$t_{k+1}=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)$ معناه

$t_{k+1}=\left(\frac{1}{3}k+1\right)(k+1)(k+2)$ أي

$t_{k+1}=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$.

**70** $s_2=1$ و $p(2)$ تعني. $s_2=1+\left(\frac{1}{2}\times 2-1\right)2^2$.

إذا كانت $s_k = 1+\left(\frac{1}{2}k-1\right)2^k$ فإن

$s_{k+1} = 1+\left(\frac{1}{2}k-1\right)2^k + k\times 2^{k-1}$ معناه

$s_{k+1} = 1+\left(\frac{k+1}{2}-1\right)2^{k+1}$ .

$$(n-1)2^n - n\times 2^{n-1}+1 = n\times 2^n - 2^n - \frac{1}{2}n\times 2^n+1$$

$$= -2^n + \frac{1}{2}n\times 2^n + 1 = 1+\left(\frac{1}{2}n-1\right)2^n = s_n$$

**71** $p(1)$ تعني $1\times2\times3 = \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4}$ .

نضع $\alpha_n = 1\times2\times3+2\times3\times4+...+n(n+1)(n+2)$

نفرض $\alpha_k = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$ ؛

معناه $\alpha_{k+1} = \alpha_k + (k+1)(k+2)(k+3)$

$$\alpha_{k+1} = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + \frac{4(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$$

أي $\alpha_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$

**72** $p(1)$ تعني $1 = (1+1)!-1$ .

نضع $\alpha_n = 1+2\times2!+3\times3!+...+n(n!)$

نفرض $\alpha_k = (k+1)!-1$ .

معناه $\alpha_{k+1} = \alpha_k + (k+1)\left[(k+1)!\right]$

أي $\alpha_{k+1} = (k+1)!-1+(k+1)\left[(k+1)!\right]$

$\alpha_{k+1} = (k+1)!(k+2)-1 = (k+2)!-1$

**73** $p(1)$ تعني $1! \ge 2^{1-1}$.

من أجل كل $k\in\mathbb{N}^*$ ، $k+1\ge 2$

إذا كان $k! \ge 2^{k-1}$ فإن $(k!)(k+1) \ge 2^{k-1}\times 2$

أي $(k+1)! \ge 2^k$ .

**74** $\mathcal{P}(4)$ تعني $2^4 \ge 4^2$ .

ليكن $k$ عددا طبيعيا كيفيا حيث $k\ge 4$ ونفرض $2^k \ge k^2$ .

إذا كان $k\ge 4$ فإن $k^2\ge 4k$ وكذلك إذا كان $k\ge 4$ فإن $2k\ge 8$ ومنه $2k>1$ إذن $2k+2k>1+2k$

وبالتالي $k^2>2k+1$ وحسب فرضية التراجع لدينا $2^k\ge k^2$ إذن $2^k>2k+1$

لدينا إذن $2^k\ge k^2$ و $2^k>2k+1$ بجمع طرف إلى طرف نجد $2^k+2^k>k^2+2k+1$ أي

$2\times 2^k>(k+1)^2$ معناه $2^{k+1}>(k+1)^2$

ومنه $2^{k+1}\ge (k+1)^2$ .

**75** $\mathcal{P}(2)$ تعني $5^2\ge 4^2+3^2$ .

نفرض $5^k\ge 4^k+3^k$ ومنه $5^{k+1}\ge 5\times 4^k+5\times 3^k$ ،

بما أن $5\times 4^k\ge 4\times 4^k$ و $5\times 3^k\ge 3\times 3^k$ فإن

$5\times 4^k+5\times 3^k\ge 4^{k+1}+3^{k+1}$ ومنه $5^{k+1}\ge 4^{k+1}+3^{k+1}$ .

**76** متباينة برنولي ( *Bernoulli* )

1) $p(1)$ تعني $1+a\ge 1+a$.

نفرض $(1+a)^k\ge 1+ka$ ومنه

$(1+a)^{k+1}\ge 1+(k+1)a+ka^2\ge 1+(k+1)a$ .

2) إذا كان $q>1$ فإن $q=1+a$ مع $a>0$

ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $q^n\ge 1+an$ ولدينا

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1+an=+\infty$ لأن $a>0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$

**77** 1) $p(2)$ تعني $12\ge 9$. نفرض $3k^2\ge (k+1)^2$

ومنه $3k^2+6k+3\ge (k+1)^2+6k+3$

أي $3(k+1)^2\ge k^2+8k+4$ بما أن $8k\ge 4k$ فإن

$3(k+1)^2\ge k^2+4k+4$ أي $3(k+1)^2\ge (k+2)^2$ .

2) نسمي $P_n$ الخاصية : " $3^n\ge 2^n+5n^2$ " .

أ ــ $P_1$ تعني $3\ge 7$ ؛ $P_2$ تعني $9\ge 24$ ؛ $P_3$ تعني $27\ge 53$ ؛ $P_4$ تعني $81\ge 96$ ؛ $P_5$ تعني $243\ge 157$

إذن $P_5$ هي الخاصية الأولى الصحيحة .

ب ــ نفرض $3^k\ge 2^k+5k^2$ مع $k\ge 5$ ، ومنه

$3^{k+1}\ge 3\times 2^k+5\times 3k^2\ge 2\times 2^k+5\times (k+1)^2$

لأن $3\ge 2$ ومن 1) لدينا $3k^2\ge (k+1)^2$ .

**78** من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $P_n$ تعني " $3^n\ge (n+2)^2$ ".

1) $P_0$ تعني $1\ge 4$ ، $P_1$ تعني $3\ge 9$ ، $P_2$ تعني $9\ge 16$ و $P_3$ تعني $27\ge 25$ وهي الخصية الصحيحة.

2) نفرض $3^k \geq (k+2)^2$ من أجل $k \geq 3$ إذن

$3^{k+1} \geq 3(k+2)^2$ معناه $3^{k+1} \geq 3k^2+12k+12$

ومنه $3^{k+1} \geq k^2+6k+9$ أي $3^{k+1} \geq (k+3)^2$ .

**79** $u_0=1$ و $u_{n+1}=\frac{u_n}{\sqrt{{u_n}^2+1}}$ .

1) $u_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $u_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$ , $u_3=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$ ؛ يبدو أن $u_n=\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$.

2) $p(0)$ تعني $u_0=1$.

نفرض $u_k=\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ ؛ $u_{k+1}=\frac{u_k}{\sqrt{{u_k}^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{k+2}}$.

**80** $u_0=7$ ، $u_{n+1}=10u_n-18$ .

1) $u_1=52$ ، $u_2=502$ ، $u_3=5002$ ، $u_4 50002$ و $u_5=500002$ . في الحد $u_n$ يوجد $(n-1)$ صفرا

2) $u_n=5\times10^n+2$ .

$p(0)$ تعني $u_0=5\times10^0+2=7$.

نفرض $u_k=5\times10^k+2$ ؛ $u_{k+1}=10u_k-18$ معناه $u_{k+1}=10(5\times10^n+2)-18=5\times10^{n+1}+2$ .

**81** $u_0=2$ ، $u_{n+1}=2u_n-3$ .

1) $u_1=1$ ، $u_2=-1$ ، $u_3=-5$ ، $u_4=-13$ و $u_5=-29$ . $3-u_n=2^n$.

2) $p(0)$ تعني $3-u_0=2^0$. نفرض $3-u_k=2^k$ ؛ $3-u_{k+1}=6-2u_k=6-2(3-2^k)=2^{k+1}$ .

**82** $u_0=3$ ، $u_{n+1}=4-u_n$ .

1) $u_1=1$ ، $u_2=3$ ، $u_3=1$ ، $u_4=3$ و $u_5=1$.

$u_{2n+1}=1$ و $u_{2n}=3$.

2) $p(0)$ تعني $u_0=3$ و $u_1=1$.

نفرض $u_{2k}=3$ و $u_{2k+1}=1$ . لدينا

$u_{2(k+1)}=4-u_{2k+1}=3$ و $u_{2(k+1)+1}=4-u_{2(k+1)}=1$.

**83** $s_n=1+3+5+...+(2n-1)$ .

1) $s_1=1$، $s_2=4$، $s_3=9$ و $s_4=16$. $s_n=n^2$.

2) $p(1)$ تعني $s_1=1^2$. نفرض $s_k=k^2$ ؛

$s_{k+1}=s_k+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$.

3) $s_n$ هو مجموع $n$ حدا الأولى من متتالية حسابية أساسها 2 وحدها الأول 1 إذن $s_n=\frac{n}{2}(1+2n-1)=n^2$.

**84** $u_0=1$ ، $u_{n+1}=n+u_n$ .

1) $u_1=1$ ؛ $u_2=2$ ؛ $u_3=4$ ؛ $u_4=7$ ؛ $u_5=11$.

يبدو أن $u_n=\frac{n(n-1)}{2}+1$ .

2) $p(0)$ تعني $u_0=\frac{0(0-1)}{2}+1$.

نفرض $u_k=\frac{k(k-1)}{2}+1$ ؛

$u_{k+1}=k+\frac{k(k-1)}{2}+1=\frac{k(k+1)}{2}+1$.

**85** $u_0=1$ ، $u_{n+1}=\frac{u_n}{u_n+2}$ .

1) $u_1=\frac{1}{3}$، $u_2=\frac{1}{7}$، $u_3=\frac{1}{15}$، $u_4=\frac{1}{31}$، $u_5=\frac{1}{63}$ .

$u_n=\frac{1}{2^{n+1}-1}$.

2) $p(0)$ تعني $u_0=\frac{1}{2-1}$. نفرض $u_k=\frac{1}{2^{k+1}-1}$؛

أي $u_{k+1}=\frac{u_k}{u_k+2}=\frac{1}{2^{k+1}-1}/\left(\frac{1}{2^{k+1}-1}+2\right)$

$u_{k+1}=\frac{1}{2^{k+1}-1}/\left(\frac{2^{k+2}-1}{2^{k+1}-1}\right)=\frac{1}{2^{k+2}-1}$.

**86** $u_0=1$ ، $u_{n+1}=u_n+2$ .

$v_0=1$ ، $v_{n+1}=v_n+u_n$ .

1) $u_n$ هو الحد العام لمتتالية حسابية أساسها 2 ومنه $u_n=2n+1$ .

2) $p(0)$ تعني $v_0=1+0^2$. نفرض $v_k=1+k^2$ ؛

$v_{k+1}=v_k+u_k=1+k^2+2k+1=1+(k+1)^2$.

**87** $u_0=1$ ، $u_{n+1}=u_n+2n+3$ .

1) $u_{n+1}-u_n=2n+3$ ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ،

$u_{n+1}-u_n>0$ أي $(u_n)$ متزايدة تماما.

2) $p(0)$ تعني $u_0>0$ نفرض $u_k>k^2$ ؛

$u_{k+1} > k^2+2k+3$ ومنه $u_{k+1}=u_k+2k+3$ وعليه $u_{k+1} > k^2+2k+1$.

**88** $u_0 \in ]0;1[$ ، **تصحيح** $u_{n+1}=-u_n^2+2u_n$ .

$p(0)$ تعني $0<u_0<1$ . نفرض $0<u_k<1$.

نعتبر الدالة $f: x \mapsto -x^2+2x$ ؛ $f'(x)=-2x+2$ ومنه $f'$ موجبة تماما على $]0;1[$ أي $f$ متزايدة تماما على $]0;1[$ وبالتالي $f(0)<f(u_k)<f(1)$ أي $0<u_{k+1}<1$.

**89** $u_0=1$ ، $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$ .

* $p(0)$ تعني $0\le u_0\le 2$. نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $[0;2]$ بـ : $f(x)=\sqrt{2+x}$ ؛ $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}$

$f'$ موجبة على $[0;2]$ ومنه $f$ متزايدة تماما على $[0;2]$ وبالتالي إذا كان $0\le u_k\le 2$ فإن $f(0)\le f(u_k)\le f(2)$ أي $\sqrt{2}\le u_{k+1}\le 2$ ومنه $0\le u_{k+1}\le 2$

* $p(n)$ هي الخاصية $u_{n+1}>u_n$.

$p(0)$ تعني $u_1>u_0$ أي $\sqrt{3}>1$ .نفرض $u_{k+1}>u_k$ معناه $u_{k+1}+2>u_k+2$ وبما أن $u_n\ge 0$ فإن $u_{k+2}>u_{k+1}$

**90** $u_0=0$ ، $u_{n+1}=\sqrt{12+u_n}$ .

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$, $0\le u_n<4$ .

3) أدرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ .

1) $u_1=\sqrt{12}\simeq 3.464$ ، $u_2=\sqrt{12+\sqrt{12}}\simeq 3.93$ , $u_3=\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12}}}\simeq 3{,}991$ ، هي تنتمي إلى المجال $]0;4]$ .

2) الخاصية $\mathcal{P}(0)$ هي $0\le u_0<4$ وهذا صحيح

ليكن $k$ عددا طبيعيا ونفترض $0\le u_k<4$ ومنه $12\le 12+u_k<16$ أي $\sqrt{12}\le\sqrt{12+u_k}<4$ ومنه $0\le\sqrt{12+u_k}<4$ إذن $0\le u_{k+1}<4$ .

3) نلاحظ أن $u_0<u_1<u_2<u_3$ لنبرهن أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}>u_n$ وهذا باستعمال الاستدلال بالراجع الخاصية $\mathcal{P}(0)$ هي $u_1>u_0$ وهذا صحيح لأن $u_0=0$ و $u_1=\sqrt{12}$. ليكن $k$ عددا طبيعيا ونفرض $u_{k+1}>u_k$ ومنه $12+u_{k+1}>12+u_k$ ومما سبق كل الحدود موجبة إذن $\sqrt{12+u_{k+1}}>\sqrt{12+u_k}$ ومنه $u_{k+2}>u_{k+1}$ .

**91** $u_0=2$ و $u_{n+1}=0{,}6\,u_n-1{,}2$ .

1) من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $\mathcal{P}(n)$ هي الخاصية $u_{n+1}<u_n$.

الخاصية $\mathcal{P}(0)$ هي $u_1<u_0$ ولدينا من تعرف المتتالية $u_0=2$ و $u_1=0$ ومنه $u_1<u_0$ إذن $\mathcal{P}(0)$ صحيحة .

ليكن $k$ عددا طبيعيا كيفيا ونفرض $u_{k+1}<u_k$ ومنه $0{,}6u_{k+1}<0{,}6u_k$ أي $0{,}6u_{k+1}-1{,}2<0{,}6u_k-1{,}2$ ومعناه $u_{k+2}<u_{k+1}$ .

2) من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $\mathcal{P}'(n)$ هي الخاصية $u_n>-3$.

$\mathcal{P}'(0)$ تعني $u_0>-3$ وهذا صحيح لأن $u_0=2$.

ليكن $k$ عددا طبيعيا كيفيا ونفرض $u_k>-3$ معناه $0{,}6u_k>-1{,}8$ أي $0{,}6u_k-1{,}2>-1{,}8-1{,}2$ وباستعمال تعريف المتتالية يكون $u_{k+1}>-3$ .

**92** $u_0=1$ ، $u_{n+1}=\dfrac{u_n+1}{u_n+3}$ .

1) $p(0)$ تعني $0\le u_0\le 1$ وهي صحيحة.

نفرض $0\le u_k\le 1$ ؛ لدينا $u_{k+1}=\dfrac{u_k+1}{u_k+3}$ ومنه $u_{k+1}\ge 0$.

$u_{k+1}-1=\dfrac{-2}{u_k+3}$ ومنه $u_{k+1}-1\le 0$ أي $0\le u_{k+1}\le 1$.

2) $p'(n)$ هي الخاصية $u_{n+1}<u_n$ .

$p'(0)$ تعني $u_1<u_0$ أي $\dfrac{1}{2}<1$. نعتبر الدالة $f: x\mapsto\dfrac{x+1}{x+3}$ ؛ $f'(x)=\dfrac{2}{(x+3)}$ ومنه $f'(x)>0$

إذن $f$ متزايدة تماما على $[0;1]$ وبالتالي إذا كان $u_{k+1}<u_k$ فإن $f(u_{k+1})<f(u_k)$ أي $u_{k+2}<u_{k+1}$.

**93** $\theta$ عدد حقيقي من المجال $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ .

$u_0=2\cos\theta$ ، $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$ .

1) أ - $u_1=\sqrt{2(1+\cos\theta)}=\sqrt{4\cos^2\dfrac{\theta}{2}}=2\cos\dfrac{\theta}{2}$.

. $u_2=\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}=2\cos\frac{\theta}{4}$

ب - $p(0)$ هي $u_0>0$ أي $2\cos\theta>0$ وهذا صحيح

لأن $\theta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ . نفرض $u_k>0$ إذن $2+u_k>2$

ومنه $\sqrt{2+u_k}>\sqrt{2}$ أي $u_{k+1}>\sqrt{2}$ ومنه $u_{k+1}>0$.

2) $p'(n)$ هي الخاصية $u_n=2\cos\frac{\theta}{2^n}$ ؛

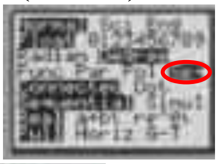
$p'(0)$ تعني $u_0=2\cos\frac{\theta}{2^0}=2\cos\theta$ .

نفرض $u_k=2\cos\frac{\theta}{2^k}$ ، $u_{k+1}=\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2^k}\right)}$ أي

$$u_{k+1}=\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2^k\times 2}}=2\cos\frac{\theta}{2^{k+1}}$$

**94** $u_0=5$ و $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)$ .

**Y=**



**Mode**

**GRAPH** **2nd**

2) يبدو أن المتتالية $(u_n)$ متناقصة .

نعتبر الدالة $f:x\mapsto\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$ لدينا من أجل كل

عدد $x\in]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)$

ومنه من أجل كل $x\in[\sqrt{2};+\infty[$ $f'(x)\geq 0$ وبالتالي

الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $[\sqrt{2};+\infty[$ .

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)-u_n=\frac{2-u_n^2}{2u_n}$$

من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $\mathcal{P}(n)$ هي الخاصية "$u_n>\sqrt{2}$".

$\mathcal{P}(0)$ هي $u_0>\sqrt{2}$ وهذا صحيح لأن $u_0=5$ .

ليكن $k$ عددا طبيعيا كيفيا ونفرض $u_k>\sqrt{2}$ ، لدينا

$f(\sqrt{2})=\sqrt{2}$ و $f(u_k)=u_{k+1}$ من فرضية التراجع

$u_k>\sqrt{2}$ وبما أن $f$ متزايدة تماما على $[\sqrt{2};+\infty[$

ينتج $f(u_k)>f(\sqrt{2})$ أي $u_{k+1}>\sqrt{2}$.

لدينا $2-u_n^2<0$ و $u_n>0$ إذن $\frac{2-u_n^2}{2u_n}<0$

أي $u_{n+1}-u_n<0$ وبالتالي المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما.

**95** من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ : $u_n=n\times 2^{n-1}$ .

$p(1)$ تعني $u_1=1+(1-1)2^1$ .

نفرض أن $u_1+u_2+...+u_k=1+(k-1)2^k$ ؛

$$u_1+u_2+...+u_k+u_{k+1}=1+(k-1)2^k+(k+1)2^k$$

أي $u_1+u_2+...+u_k+u_{k+1}=1+k\,2^{k+1}$.

**96** من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ : $u_n=\frac{1}{n(n+1)}$ .

1) لدينا $u_1=\frac{1}{2}$ و $p(1)$ تعني $u_1=\frac{1}{1+1}$.

نفرض $u_1+u_2+...+u_k=\frac{k}{k+1}$ ؛

$$u_1+u_2+...+u_k+u_{k+1}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

أي $u_1+u_2+...+u_{k+1}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$.

2) نسمي $S$ المجموع

$$\frac{1}{1427\times 1428}+\frac{1}{1428\times 1429}+...+\frac{1}{2007\times 2008}.$$

ونضع $T=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{2007\times 2008}$

و $t=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{1426\times 1427}$

إذن $S=T-t=\frac{2007}{2008}-\frac{1426}{1427}=\frac{581}{2865416}$

**97** الخاصية الابتدائية هي $\left(2+\sqrt{3}\right)^0=p_0+q_0\sqrt{3}$

وهي صحيحة بأخذ $p_0=1$ و $q_0=0$.

نفرض أنه من أجل $k\in\mathbb{N}$ ، يوجد عددان طبيعيان $p_k$

و $q_k$ حيث $\left(2+\sqrt{3}\right)^k=p_k+q_k\sqrt{3}$.

معناه $\left(2+\sqrt{3}\right)^{k+1}=\left(2+\sqrt{3}\right)\left(p_k+q_k\sqrt{3}\right)$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{k+1}=\left(2p_k+3q_k\right)+\left(p_k+2q_k\right)\sqrt{3}$$

بوضع $p_{k+1}=2p_k+3q_k$ و $q_{k+1}=p_k+2q_k$ وهما عددان طبيعيان فيكون $\left(2+\sqrt{3}\right)^{k+1}=p_{k+1}+q_{k+1}\sqrt{3}$.

**98** (1 $u_1=1$ ، $u_2=3$ ، $u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n$ .

أ ـ $u_3=5$ ، $u_4=7$ و $u_5=9$ . $u_n=2n-1$.

ب ـ الخاصية الابتدائية صحيحة لأن $u_1=2\times1-1=1$.

نفرض $u_k=2k-1$ ؛

$$u_{k+1}=2u_k-u_{k-1}=4k-2-2k+3=2k+1$$

(2 $v_0=\frac{2}{5}$ ، $v_1=1$ و $v_{n+2}=5v_{n+1}-6v_n$ .

الخاصية الابتدائية صحيحة لأن $v_0=\frac{2^0+3^0}{5}=\frac{2}{5}$.

نفرض $v_k=\frac{2^k+3^k}{5}$ ؛ $v_{k+1}=5v_k-6v_{k-1}$

$$v_{k+1}=2^k+3^k-\frac{6}{5}\left(2^{k-1}+3^{k-1}\right)\text{ ؛}$$

$$v_{k+1}=2^k+3^k-\frac{3}{5}2^k-\frac{2}{5}3^k=\frac{1}{5}2^{k+1}+\frac{1}{5}3^{k+1}.$$

**99** $u_0=1$ ، $u_1=2$ ، $u_{n+1}+u_{n-1}=4u_n$.

الخاصية الابتدائية $u_0=\frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^0+\left(2-\sqrt{3}\right)^0\right]$.

نفرض $u_k=\frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^k+\left(2-\sqrt{3}\right)^k\right]$ ؛

ومعناه $u_{k+1}=4u_k-u_{k-1}$

$$u_{k+1}=2\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^k+\left(2-\sqrt{3}\right)^k\right]-\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^{k-1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{k-1}}{2}$$

$$u_{k+1}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{k-1}\left(4+2\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)^{k-1}\left(4-2\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)$$

$$4+2\sqrt{3}-\frac{1}{2}=\frac{4+3+2\sqrt{3}}{2}=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{2}$$

$$4-2\sqrt{3}-\frac{1}{2}=\frac{4+3-2\sqrt{3}}{2}=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{2}$$

ومنه $u_{k+1}=\frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{k+1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{k+1}\right]$.

**100** $u_0=2$ و $u_{n+1}=\sqrt{u_n+1}$ .

أ - الخاصية الابتدائية $u_0>-1$.

نفرض $u_k>-1$ معناه $u_k+1>0$ ومنه $\sqrt{u_k+1}>0$

أي $u_{k+1}>0$ وبالتالي $u_{k+1}>-1$.

ب - $u_0=2$ و $u_1=\sqrt{3}$ ومنه $u_1<u_0$.

نفرض $u_{k+1}<u_k$ ومنه $0<u_{k+1}+1<u_k+1$ إذن $\sqrt{u_{k+1}+1}<\sqrt{u_k+1}$ أي $u_{k+2}<u_{k+1}$ .

جـ - الخاصية الابتدائية $u_0\geq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ أي $2\geq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

نفرض $u_k\geq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ومنه $u_k+1\geq\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ إذن $\sqrt{u_k+1}\geq\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ أي $u_{k+1}\geq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

لأن $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}}=\frac{\sqrt{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

**101** $u_0=1$ ، $u_{n+1}=\frac{u_n+4}{u_n-2}$ ، $v_n=\frac{u_n+1}{u_n-4}$ .

(1 $u_0=1$ ومنه $u_0\neq4$ . نفرض $u_k\neq4$

ونفترض $u_{k+1}=4$ أي $\frac{u_k+4}{u_k-2}=4$ معناه $u_k=4$

وهذا تناقض إذن $u_{k+1}\neq4$ أي كل $n\in\mathbb{N}$ ، $u_n\neq4$.

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+1}{u_{n+1}-4}=\frac{2u_n+2}{u_n-2}\times\frac{u_n-2}{-3u_n+12}\text{؛}$$

$$v_{n+1}=-\frac{2}{3}\times\frac{u_n+1}{u_n-4}=-\frac{2}{3}v_n\ .$$

(2 $v_n=v_0\left(-\frac{2}{3}\right)^n=\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ .

$v_n=\frac{u_n+1}{u_n-4}$ معناه $u_n\left(v_n-1\right)=4v_n+1$

لنبرهن أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $v_n\neq1$

لدينا الخاصية الابتدائية $v_0 \neq 1$ لأن $v_0 = -\frac{2}{3}$ . إذا كان

$v_k \neq 1$ أي $\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1} \neq 1$ فإن $\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+2} \neq 1$ ومنه $v_{k+1} \neq 1$

$$u_n = \frac{4v_n+1}{v_n-1} = \left[4\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right] / \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}-1\right] .$$

**102** $p(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$ .

1) $$p(x+1)-p(x) = \left(\frac{x^3}{3}+x^2+x+\frac{1}{3}-\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{2}+\frac{x+1}{6}\right) - \left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{6}\right) = x^2$$

2) الخاصية الابتدائية هي $p(0)=0$ إذن $p(0)\in\mathbb{N}$ .

نفرض $p(k)\in\mathbb{N}$ لدينا $p(k+1)=p(k)+k^2$ ومنه $p(k+1)\in\mathbb{N}$ .

3) الخاصية الابتدائية هي $p(1)=0^2$ وهذا صحيح لأن

$$p(1) = \frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}+\frac{1}{6} = \frac{2-3+1}{6}=0 .$$

نفرض $p(k+1) = 1^2+2^2+...+k^2$ ؛

لدينا $p(n+2)=p(n+1)+(n+1)^2$ معناه

$$p(n+2) = 1^2+2^2+...+n^2+(n+1)^2 .$$

**103** $u_1=0$ ، $u_{n+1}=\frac{-1}{u_n-2}$ .

لدينا $u_2=\frac{1}{2}$ ، $u_3=\frac{2}{3}$ ، $u_4=\frac{3}{4}$ يبدو أن $u_n=\frac{n-1}{n}$

لنبرهن باستعمال التراجع .

الخاصية الابتدائية هي $u_1 = \frac{1-1}{1}=0$ وهي صحيحة.

نفرض $u_k=\frac{k-1}{k}$؛ $u_{k+1} = \frac{-1}{u_k-2} = \frac{-1}{\frac{k-1}{k}-2} = \frac{k}{k+1}$

$u_{2006}=\frac{2005}{2006}$ .

**104** إذا كان $n=24$ فإن $n=5\times2+7\times2$

نفرض من أجل $k\geq 24$ فيكون $k=5a+7b$

- إذا كان $b=0$ فإن $k=5a$ وعليه $a\geq5$ ولدينا :
$k+1=5a-20+21=5(a-4)+7\times3$ .
- إذا كان $b=1$ فإن $k=5a+7$ وعليه $a\geq4$ ولدينا :
$k+1=5a-20+28=5(a-4)+7\times4$ .
- إذا كان $b\geq2$ فإن $k+1=5a+7b+15-14$
أي $k+1=5(a+3)+7(b-2)$ .

**105** 1) $u_1=\frac{1}{2}$ ، $u_{n+1}=\left(\frac{n+1}{2n}\right)u_n$ .

أ ـ $u_2=\frac{1}{2}$ ، $u_3=\frac{3}{8}$ ، $u_4=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$ ، $u_5=\frac{5}{32}$ .

ب ـ الخاصية الابتدائية هي $u_1=\frac{1}{2^1}$. نفرض $u_k=\frac{k}{2^k}$؛

$$u_{k+1}=\left(\frac{k+1}{2k}\right)u_k = \left(\frac{k+1}{2k}\right)\frac{k}{2^k}=\frac{k+1}{2^{k+1}} .$$

2) $k\in\mathbb{N}^*$ ، $v_1=\frac{1}{k}$ ، $v_{n+1}=\left(\frac{n+1}{kn}\right)v_n$ .

$v_1=\frac{1}{k}$ ، $v_2=\frac{2}{k^2}$ ، $v_3=\frac{3}{k^3}$ ... ، $v_n=\frac{n}{k^n}$.

الخاصية الابتدائية هي $v_1=\frac{1}{k^1}$ . نفرض $v_r=\frac{r}{k^r}$ ،

$$v_{r+1}=\left(\frac{r+1}{kr}\right)v_n = \left(\frac{r+1}{kr}\right)\frac{r}{k^r}=\frac{r+1}{k^{r+1}} .$$

## 3 ـ تقارب متتالية عددية .

**106** 1) $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{1-n}=0$ ، 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)=0$ .

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+2)e^{-n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n}+2e^{-n}=0$ .

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(3+e^{2-n}\right)=\ln 3$ .

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^n-6}{2e^n+1}=\frac{1}{2}$ ، 6) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^{-n}-1}{2e^{-n}+1}=-1$ .

7) $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{e^n-3}{e^n+1}\right)=\ln 1=0$ .

8) $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{e^n+2}{e^{2n}+1}\right)=0$ .

**107** 1) $u_n = n^2\left(\sqrt{3+\frac{2}{n+1}}-\sqrt{3}\right)$ .

$u_n = \frac{2n^2}{n+1}\frac{1}{\sqrt{3+\frac{2}{n+1}}+\sqrt{3}}$ ؛ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{3}}=+\infty$

2) $u_n=\sqrt{3n^2-1}-\sqrt{3}n=\dfrac{-1}{\sqrt{3n^2-1}+\sqrt{3}n}$ .

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ .

3) $u_n=\dfrac{n}{\sqrt{n+2}}-\dfrac{n}{\sqrt{n+1}}$ .

$$u_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+3n+2}}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}\right)$$

$u_n=\dfrac{-1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)}$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

4) $u_n=\dfrac{3n-\sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^2+5}}=\dfrac{-1}{\sqrt{n^2+5}\left(3n+\sqrt{9n^2+1}\right)}$ ،

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ .

**108** أ - $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n}{5^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n=0$ لأن $-1<\dfrac{2}{5}<1$ .

ب - $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3,01^n}{3^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3,01}{3}\right)^n=+\infty$ لأن $\dfrac{3,01}{3}>1$ .

جـ - $u_n=1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5^2}+...+\dfrac{1}{5^n}$ ؛

$u_n=-\dfrac{5}{4}\left[\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}-1\right]$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\dfrac{5}{4}$ .

**109** $u_0=2$ ، $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{3u_n+1}$ و $v_n=\dfrac{1}{u_n}$ .

1) استعمال التراجع ؛ $p(0)$ تعني $u_0>0$.

إذا كانت $u_k>0$ فإن $3u_k+1>0$ ومنه $u_{k+1}>0$.

2) ليكن $n\in\mathbb{N}$ ، $v_{n+1}=\dfrac{1}{u_{n+1}}=\dfrac{3u_n+1}{u_n}=3+v_n$ .

3) $v_n=3n+\dfrac{1}{2}$ ومنه $u_n=\dfrac{2}{6n+1}$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ .

**110** $u_0=2$ ، $u_{n+1}=\dfrac{1}{3}u_n-2$ و $v_n=u_n+3$ .

$s_n=v_0+v_1+...+v_n$ و $t_n=u_0+u_1+...+u_n$ .

1) ليكن $n\in\mathbb{N}$ ، $v_{n+1}=u_{n+1}+3=\dfrac{1}{3}u_n+1$ معناه

$v_{n+1}=\dfrac{1}{3}(v_n-3)+1=\dfrac{1}{3}v_n$ ومنه $(v_n)$ هندسية .

2) $v_n=5\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ ومنه $u_n=v_n-3=5\left(\dfrac{1}{3}\right)^n-3$ بما

أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-3$ .

$s_n=\dfrac{3}{2}v_0\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}s_n=\dfrac{3}{2}v_0=\dfrac{15}{2}$ .

$t_n=s_n-3(n+1)$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=-\infty$

**111** $u_n=\dfrac{n^2+1}{n+1}$ ؛ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$ .

$v_n=\dfrac{u_n}{n}=\dfrac{n^2+1}{n^2+n}$ ؛ $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{n^2}=1$ .

$w_n=u_n-n=\dfrac{1-n}{n+1}$ ؛ $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-n}{n}=-1$ .

$t_n=\dfrac{v_n-1}{w_n-1}=\dfrac{n-1}{2n^2}$ ؛ $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2n}=0$ .

**112** $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n^2-4}{n+1}=+\infty$ .

$\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{n}=3$ .

$\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-3n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-3n-4}{n+1}=-3$ .

**113** من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$، $u_n=\dfrac{1}{n!}$.

1) $u_1=1$ ؛ $u_2=\dfrac{1}{2}$ ؛ $u_3=\dfrac{1}{6}$ ؛ $u_4=\dfrac{1}{24}$ ؛

$u_5=\dfrac{1}{120}$ ؛ $u_6=\dfrac{1}{720}$ .

2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ؛ $n!\geq n$

ومنه $0<u_n\leq\dfrac{1}{n}$ ؛ بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ .

**114** من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $u_n=\dfrac{\cos(3n-\pi)}{\sqrt{n}}$ .

من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $-1\le\cos(3n-\pi)\le 1$

ومنه من أجل $n\neq 0$ ، $-\frac{1}{\sqrt{n}}\le u_n\le\frac{1}{\sqrt{n}}$ ؛ بما أن

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ .

**115** من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $u_n=n+1-\cos\frac{n\pi}{5}$ .

بما أن $-1\le-\cos\frac{n\pi}{5}\le 1$ ومنه $n\le u_n\le n+2$ ؛

$\lim\limits_{n\to+\infty}n+2=\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

**116** من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $u_n=\left(\frac{n}{10}-1\right)^n$ .

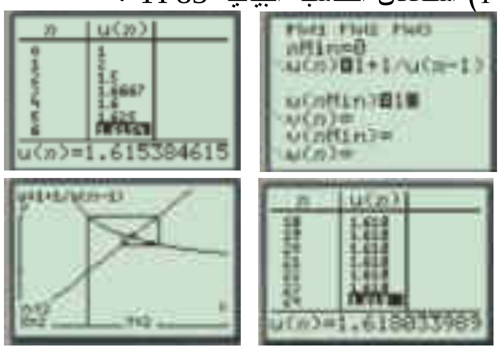
1) القيم المقربة لأحد عشر الحدود الأولى من $(u_n)$.

2) ليكن $n$ عدد طبيعي، $n\ge 30$ معناه $\frac{n}{10}-1\ge 2$

ومعناه $\left(\frac{n}{10}-1\right)^n\ge 2^n$ أي $u_n\ge 2^n$

$2>1$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=+\infty$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ .

**117** 1) استعمال الحاسبة البيانية TI 83 .




ابتداء من $u_{23}$ أي الدليل 23 تستقر قيم الحدود على $1,618033989$.

يبدو أن المتتالية متقاربة ونهايتها العدد الحقيقي $1,618033989$ .

إذا كانت المتتالية $u$ متقاربة فإنه يوجد عدد حقيقي $l$

حيث $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ وكذلك $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=l$ هذا من جهة ،

ومن جهة أخرى $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}1+\frac{1}{u_n}=1+\frac{1}{l}$ إذن

$1+\frac{1}{l}=l$ ومعناه $l^2-l-1=0$ و $l\neq 0$ .

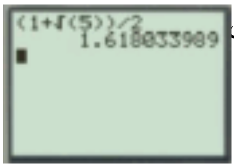
مميز المعادلة $l^2-l-1=0$ هو 5 ومنه المعادلة تقبل

حلين متمايزين هما $l'=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $l''=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

لدينا $u_0=1$ ومنه $u_0>0$ وإذا كان $u_k>0$ من أجل $k$

عدد طبيعي كيفي, فإن $1+\frac{1}{u_k}>0$ أي $u_{k+1}>0$

وحسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل




كل عدد طبيعي $n$ ، إذن $u_n>0$

وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n>0$ $l=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

**118** لدينا $u_1=0,57=57\times\frac{1}{100}$ ،

$u_2=0,57+0,0057=0,57+0,57\times\frac{1}{100}$

$u_2=57\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}\right)$ .

نفترض أن $u_k=57\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\ldots+\frac{1}{100^k}\right)$ من أجل $k$ عدد طبيعي كيفي غير معدوم. $u_{k+1}=0,\underbrace{57\ldots57}_{2k+2}$

ومنه $u_{k+1}=\underbrace{\qquad}_{2k}+0,\underbrace{00\ldots0057}_{2k+2}$

إذن $u_{k+1}=u_k+\frac{57}{10^{2k+2}}$ ؛

$u_{k+1}=57\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\ldots+\frac{1}{100^k}\right)+57\times\frac{1}{100^{k+1}}$

$u_{k+1}=57\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\ldots+\frac{1}{100^k}+\frac{1}{100^{k+1}}\right)$.

وحسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، $u_n=57\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\ldots+\frac{1}{100^n}\right)$

$\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\ldots+\frac{1}{100^n}\right)$ هو مجموع حدود متتابعة

لمتتالية هندسية أساسها وحدها الأول مساويين للعدد $\frac{1}{100}$ .

$$u_n = 57\times\frac{1}{100}\times\frac{1-\left(\frac{1}{100}\right)^n}{1-\frac{1}{100}} = \frac{57}{100}\times\frac{100}{99}\left[1-\left(\frac{1}{100}\right)^n\right]$$

ومنه $u_n=\frac{57}{99}\left[1-\left(\frac{1}{100}\right)^n\right]$ بما أن $-1<\frac{1}{100}<1$

فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^n=0$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\frac{57}{99}$ .

**119** $(u_n)$ معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n=\sqrt{n^2+n}-n$ .

1) حساب الحدود باستعمال مجدول إكسيل .

| $n$ | $u_n$ |
|---|---|
| 1 | 0.4142135623731 |
| 2 | 0.4494897427832 |
| 3 | 0.4641016151378 |
| 4 | 0.4721359549996 |

| $n$ | $u_{10^n}$ |
|---|---|
| 1 | 0.4880884817015 |
| 2 | 0.4987562112089 |
| 3 | 0.4998750624610 |
| 4 | 0.4999875006251 |
| 5 | 0.4999987500050 |
| 6 | 0.4999998749699 |
| 7 | 0.4999999869615 |
| 8 | 0.5000000000000 |
| 9 | 0.5000000000000 |
| 10 | 0.5000000000000 |
| 11 | 0.5000000000000 |
| 12 | 0.5000000000000 |
| 13 | 0.5000000000000 |
| 14 | 0.5000000000000 |
| 15 | 0.0000000000000 |

2) ليكن $n\in\mathbb{N}^*$،

$$u_n=\sqrt{n^2+n}-n$$

$$u_n=\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}$$

$$u_n=\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n}=\frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{2}$

من أجل القيم الكبيرة للعدد $n$، في المجدولات أو الحاسبات يهمل $n$ بالنسبة لـ $n^2$ ولا يمكن التمييز بين $n^2$ و $n^2+n$ ولهذا نتائج الحساب لـ $\sqrt{n^2+n}-n$ تسجل 0.

**120** $(u_n)$ معرفة بـ $u_0=1$ و $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+\frac{14}{3}$ .

1) لنبرهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}>u_n$ .

لدينا $u_0=1$ و $u_1=\frac{1}{3}u_0+\frac{14}{3}=5$ إذن $u_1>u_0$ .

نفترض أن $u_{k+1}\geq u_k$ وهذا من أجل $k$ عدد طبيعي كيفي. الدالة التآلفية $f:x\mapsto\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ إذن $f(u_{k+1})>f(u_k)$ أي $u_{k+2}>u_{k+1}$

وحسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}>u_n$ أي المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما .

2) $x=\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}$ معناه $3x=x+14$ ومعناه $2x=14$ أي $x=7$ .

3) إذا كانت المتتالية $(u_n)$ متقاربة فإنها تقبل نهاية عددا حقيقيا $l$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ وكذلك $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=l$

لدينا $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+\frac{14}{3}$ ومنه

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}u_n+\frac{14}{3}\right)=\frac{1}{3}l+\frac{14}{3}$ وبالتالي

$\frac{1}{3}l+\frac{14}{3}=l$ وحسب السؤال السابق يكون $l=7$ .

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $v_n=u_n-7$ معناه $v_{n+1}=u_{n+1}-7$ أي $v_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+\frac{14}{3}-7=\frac{1}{3}u_n-\frac{7}{3}$

بما أن $u_n=v_n+7$ فإن $v_{n+1}=\frac{1}{3}(v_n+7)-\frac{7}{3}=\frac{1}{3}v_n$

وبالتالي المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0=-6$ .

$$v_n=v_0\left(\frac{1}{3}\right)^n=-6\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$v_n=u_n-7$ معناه $u_n=v_n+7$

أي $u_n=-6\left(\frac{1}{3}\right)^n+7$ . بما أن $-1<\frac{1}{3}<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=7$ إذن $(u_n)$ متقاربة.

**121**

1) الخاصية $2^n\leq(n-1)!$ تكون صحيحة من أجل $n=6$ .

نفترض أن $2^k \le (k-1)!$ من أجل $k$ عدد طبيعي كيفي أكبر من أو يساوي 6 . إذن $2^k \le (k-1)!$ و $2 \le k$

ومنه $2\times 2^k \le k\,(k-1)!$ وبالتالي $2^{k+1} \le k\,!$

إذن حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من كل عدد طبيعي $n \ge 6$ ، $2^n \le (n-1)!$

2) ليكن $n \ge 6$ ، $2^n \le (n-1)!$ معناه $2^n \le \frac{n(n-1)!}{n}$ أي $2^n \le \frac{n!}{n}$ و بالتالي $\frac{2^n}{n!} \le \frac{1}{n}$ .

إذن من أجل كل عدد طبيعي $n$ حيث $n \ge 6$ ، بما أن $0 \le \frac{2^n}{n!} \le \frac{1}{n}$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ ،

إذن المتتالية ذات الحد العام $\frac{2^n}{n!}$ ، متقاربة .

**122** $a$ عدد حقيقي و $(u_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = a$ والعلاقة التراجعية : $u_{n+1} = \frac{u_n}{2+u_n^2}$ .

1) ليكن $n$ عددا طبيعيا، $2+u_n^2 \ge 2$ معناه $\frac{1}{2+u_n^2} \le \frac{1}{2}$ ومعناه $\frac{|u_n|}{2+u_n^2} \le \frac{|u_n|}{2}$

ولدينا $u_{n+1} = \frac{u_n}{2+u_n^2}$ إذن $|u_{n+1}| = \frac{|u_n|}{|2+u_n^2|} = \frac{|u_n|}{2+u_n^2}$

وبالتالي : من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$، $|u_{n+1}| \le \frac{|u_n|}{2}$ .

2) لدينا $|u_0| = |a|$ و $\frac{|a|}{2^0} = |a|$ إذن الخاصية $|u_0| \le \frac{|a|}{2^0}$ صحيحة .

نفترض أن الخاصية $|u_k| \le \frac{|a|}{2^k}$ من أجل عدد طبيعي $k$ كيفي إذن $\frac{1}{2}|u_k| \le \frac{1}{2}\times\frac{|a|}{2^k}$ ، ومنه $\frac{|u_k|}{2} \le \frac{|a|}{2^{k+1}}$ بما أن $|u_{k+1}| \le \frac{|u_k|}{2}$ من السؤال السابق فإن $|u_{k+1}| \le \frac{|a|}{2^{k+1}}$ إذن حسب مبدأ التراجع ينتج من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$، $|u_n| \le \frac{|a|}{2^n}$ .

3) حسب السؤال السابق من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$، $|u_n| \le \frac{|a|}{2^n}$ معناه $-\frac{|a|}{2^n} \le u_n \le \frac{|a|}{2^n}$ أي

$$-|a|\left(\frac{1}{2}\right)^n \le u_n \le |a|\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

بما أن $-1 < \frac{1}{2} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ ومنه

$$\lim_{n\to+\infty} -|a|\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} |a|\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ .

**123** $(u_n)$ معرفة بـ $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{u_n+2}{2u_n+1}$.

1) أ - لدينا : $u_0 > 0$ نفترض أن $u_k > 0$ من أجل $k$ عدد طبيعي كيفي ، ومنه $u_k + 2 > 0$ و $2u_k + 1 > 0$ إذن $\frac{u_k+2}{2u_k+1} > 0$ وبالتالي $u_{k+1} > 0$ وحسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$، $u_n > 0$ .

ب - إذا كانت المتتالية $(u_n)$ متقاربة فإنها تقبل نهاية أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ حيث $l \in \mathbb{R}_+^*$ ، ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ هذا من جهة . ومن جهة أخرى لدينا

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n+2}{2u_n+1} = \frac{l+2}{2l+1}$ ومنه $\frac{l+2}{2l+1} = l$

ومعناه $2l^2 = 2$ أي $l^2 = 1$ ومنه $l = 1$ .

2) $\mathcal{C}$ المنحني الممثل للدالة $f : x \mapsto \frac{x+2}{2x+1}$، الدالة $f$ تقبل الاشتقاق على $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$ و $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

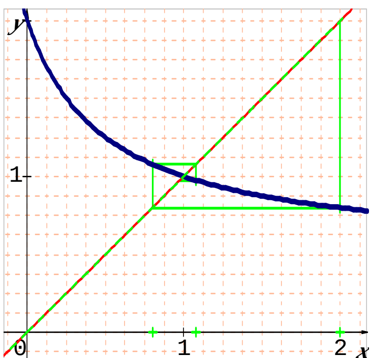
ولدينا : $f'(x) = \frac{(2x+1)-2(x+2)}{(2x+1)^2} = \frac{-3}{(2x+1)^2}$

ومنه من أجل كل عدد $x$ من $[0\,;\,2,2]$ $f'(x) < 0$

إذن الدالة $f$ متناقصة تماما على $[0\,;\,2,2]$

| $x$ | 0 | 1 | 2,2 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2 | 1 | 0,77 |

يبدو أن $(u_n)$ متقاربة



ونهايتها 1 .

3) نضع من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ ، $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$ .

أ- ليكن $n$ عددا طبيعيا ، $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}$

$$v_{n+1}=\frac{\frac{u_n+2}{2u_n+1}-1}{\frac{u_n+2}{2u_n+1}+1}=\frac{-u_n+1}{3u_n+3}=-\frac{1}{3}\times\frac{u_n-1}{u_n+1}=-\frac{1}{3}v_n$$

إذن $(v_n)$ هندسية أساسها $-\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0=\frac{u_0-1}{u_0+1}=\frac{1}{3}$

بما أن $-1<-\frac{1}{3}<1$ فإن $(v_n)$ متقاربة .

$v_n=v_0\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n=(-1)^n\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ .

ب- ليكن $n$ عددا طبيعيا ، $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$

لدينا $v_n=1$ معناه $\frac{u_n-1}{u_n+1}=1$ ومعناه $u_n-1=u_n+1$

أي $-1=1$ وهذا تناقض إذن $v_n\neq 1$.

$v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$ معناه $v_nu_n+v_n=u_n-1$ ومعناه

$v_nu_n-u_n=-v_n-1$ يكافئ $(v_n-1)u_n=-v_n-1$

أي $u_n=\frac{-v_n-1}{v_n-1}$ .

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_0\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n=0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

وبالتالي $(u_n)$ متقاربة.

**124** $(u_n)$ معرفة بـ $u_0=5$ و $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$.

1) لدينا $u_0=5$ ، $u_1=\sqrt{7}$ و $2\le\sqrt{7}\le 5$ إذن $2\le u_1\le u_0$ .

نفترض $2\le u_{k+1}\le u_k$ يعني $4\le 2+u_{k+1}\le 2+u_k$

بما أن الدالة الجدر التربيعي متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

فإن $\sqrt{4}\le\sqrt{2+u_{k+1}}\le\sqrt{2+u_k}$ أي $2\le u_{k+2}\le u_{k+1}$

وحسب مبدأ التراجع نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $2\le u_{n+1}\le u_n$ .

2) من السؤال السابق ينتج أن المتتالية $(u_n)$ متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 2 إذن هي متقاربة ونهايتها $l\ge 2$.

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=l$ هذا من جهة ، ومن جهة أخرى $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{2+u_n}=\sqrt{2+l}$ إذن $l=\sqrt{2+l}$ .

لدينا $l\ge 2$ و $l=\sqrt{2+l}$ إذن $l^2=2+l$ معناه $l^2-l-2=0$ ومعناه $(l+1)(l-2)=0$ يكافئ $l=2$ أو $l=-1$ . بما أن $l\ge 2$ فإن $l=2$ .

**125** نعتبر المتتالية $u$ المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ .

1) الدالة $f:x\mapsto\ln(x+1)-x$ تقبل الاشتقاق على $]-1;+\infty[$ و $f'(x)=\frac{1}{x+1}-1=\frac{-x}{x+1}$ .

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}f(x)=-\infty$ ؛

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[\frac{\ln(x+1)}{x+1}-\frac{x}{x+1}\right]=-\infty$$

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-\infty$ |

2) من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ ، $f(x)\le 0$ معناه $\ln(x+1)\le x$ ، بوضع $x=\frac{1}{k}$ مع $k\in\mathbb{N}^*$ يكون $x\in]-1;+\infty[$ ومنه $\ln\left(\frac{1}{k}+1\right)\le\frac{1}{k}$ ولدينا

$$\ln\left(\frac{1}{k}+1\right)=\ln\left(\frac{1+k}{k}\right)=\ln(1+k)-\ln k$$

ومنه من أجل كل $k$ من $\mathbb{N}^*$ ، $\ln(k+1)-\ln k \le \frac{1}{k}$ .

بتطبيق هذه المتباينة $n$ مرة نحصل على :

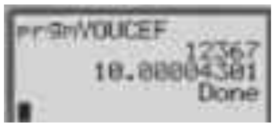
$\ln 2-\ln 1\le 1$ ، $\ln 3-\ln 2\le \frac{1}{2}$ ، $\ln 4-\ln 3\le \frac{1}{3}$ ،

... ، $\ln(n+1)-\ln n \le \frac{1}{n}$ ؛ وبجمع طرفا إلى طرف

نجد من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}^*$ ، $\ln(n+1)\le u_n$ .

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n+1)=+\infty$ و $\ln(n+1)\le u_n$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ .

3) البرنامج الذي يحدّد أصغر عدد طبيعي $n$ يحقق: $u_n\ge 10$ .


أصغر عدد طبيعي $n$ يحقق $u_n\ge 10$ هو $n=12367$ .

## 4 - المتتاليات المحدودة .

**126** المتتاليتان $(u_n)$ و $(v_n)$ معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم بـ : $u_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ و $v_n=\frac{1}{n}$

.

1) من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $n^2+1>1$ معناه $\sqrt{n^2+1}>1$

أي $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}<1$ ، إذن 1 عنصر حاد من الأعلى لـ $(u_n)$.

2) من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $n^2+1>n^2$ معناه $\sqrt{n^2+1}>n$ أي $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}<\frac{1}{n}$

3) $0<u_n<v_n<1$ .

**127** $(u_n)$ معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم بـ : $u_n=\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+...+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ .

1) من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $u_{n+1}-u_n=\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$

$1+\frac{1}{n+1}>1$ معناه $\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)>0$ أي $(u_n)$ متزايدة .

2) $u_n=\ln(2)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+...+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$$u_n=\ln\left(2\times\frac{3}{2}\times...\times\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)$$

3) $(u_n)$ متزايدة ونهايتها $+\infty$ إذن هي محدودة من الأسفل بـ $u_0=\ln 2$ وليست محدودة من الأعلى.

**128** $(u_n)$ معرفة بـ : $u_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}$

.

1) $u_n=\dfrac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2\times 3^{n-1}}$ ومنه

$u_n-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2\times 3^{n-1}}$ أي $u_n-\frac{3}{2}<0$ معناه $u_n<\frac{3}{2}$.

إذن العدد $\frac{3}{2}$ هو عنصر حاد من الأعلى للمتتالية $(u_n)$ .

2) $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3^{n+1}}$ إذن $u_{n+1}-u_n>0$

ومنه المتتالية $(u_n)$ متزايدة .

$(u_n)$ متزايدة ومحدودة من الأعلى إذن هي متقاربة .

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{2}-\frac{1}{2\times 3^{n-1}}=\frac{3}{2}$ .

**129** لتكن المتتالية $(u_n)$ المعرفة بحدها الأول $u_0$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=e^{-u_n}$.

نستعمل البرهان بالتراجع لإثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\ge 2$ ، $0<u_n<1$ .

لدينا $u_1=e^{-u_0}$ ومن أجل كل عدد حقيقي $u_0$ $e^{-u_0}>0$

إذن $u_1>0$ وبما أن الدالة $x\mapsto e^{-x}$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ فإن $0<e^{-u_1}<e^{-0}$ أي $0<e^{-u_1}<1$ وبالتالي $0<u_2<1$ .

نفترض أنه من أجل $k$ عدد طبيعي كيفي , $0<u_k<1$ ولنبرهن أن $0<u_{k+1}<1$.

بما أن الدالة $x \mapsto e^{-x}$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ فإنه من فرضية التراجع $0 < u_k < 1$ ينتج : $e^{-0} > e^{-u_k} > e^{-1}$

أي $1 > e^{-u_k} > \frac{1}{e}$، ومن تعريف المتتالية لدينا $u_{k+1} = e^{-u_k}$

إذن $1 > u_{k+1} > \frac{1}{e}$ ومنه $0 < u_{k+1} < 1$ .

إذن حسب مبدأ التراجع نستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ , $0 < u_n < 1$ .

**130** $(u_n)$ معرفة بـِ : $u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^n}$ .

1) من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4^{n+1}}$

ومنه $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4^{n+1}}$ ؛ إذن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $u_{n+1} - u_n > 0$ ، وبالتالي $(u_n)$ متزايدة تماما .

2) $u_n$ هو مجموع حدود متتابعة للمتتالية الهندسية ذات الأساس $\frac{1}{4}$ والحد الأول $1$ ؛

إذن $u_n = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{4}{3}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1\right]$ أي

$u_n = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$ . بما أن

$-1 < \frac{1}{4} < 1$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{4}{3}$ .

3) بما أن المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما فإنها محدودة من الأسفل بحدها الأول $u_0$ . زيادة عن هذا فإنها تتقارب إلى $\frac{4}{3}$ إذن هي محدودة من الأعلى بالعدد $\frac{4}{3}$ وبالتالي لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ , $1 \leq u_n < \frac{4}{3}$ .

$u_n > 1{,}333333$ معناه $\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n > 1{,}333333$

ومعناه $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n < \frac{4}{3} - 1{,}333333$ ويكافئ

$\left(\frac{1}{4}\right)^n < 4 - 3{,}999999$ ومعناه

$n \ln 0{,}25 < \ln(0{,}000001)$ أي $n > \frac{\ln 10^{-6}}{\ln 0{,}25}$ ومنه $n \geq 10$ إذن ليس $1{,}333333$ عنصرا حادا للمتتالية $(u_n)$ .

**131** $(u_n)$ المعرفة بـِ $u_0$ عدد حقيقي معطى و من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = u_n{}^2 - 3u_n + 5$ .

1) $u_{n+1} - u_n - 1 = u_n{}^2 - 4u_n + 4 = (u_n + 2)^2$

إذن من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} - u_n \geq 1$ ، نستنتج أن $(u_n)$ متزايدة.

2) إذا كانت $(u_n)$ متقاربة ونهايتها $l$ فإن $l = l^2 - 3l + 5$ معناه $l^2 - 4l + 5 = 0$ .

3) المميز المختصر لـِ $l^2 - 4l + 5 = 0$ هو $-1$ إذن لا يوجد أي عدد حقيقي $l$ يحقق المعادلة $l^2 - 4l + 5 = 0$ ومنه المتتالية $(u_n)$ متباعدة.

إذا كانت $(u_n)$ محدودة بما أنها متزايدة فتكون متقاربة وهذا تناقض إذن $(u_n)$ ليست محدودة من الأعلى.

مما سبق نستنتج أن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

**132** لتكن المتتالية $(u_n)$ المعرفة بـِ $u_0 = \frac{11}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = 3u_n - 4$ .

1) $u_1 = \frac{17}{4}$ و $u_2 = \frac{35}{4}$ .

2) استعمال الاستدلال بالتراجع للبرهان على الخاصية $u_{n+1} \geq u_n$.

3) $(v_n)$ معرفة على $\mathbb{N}$ بـِ : $v_n = 4u_n + \alpha$ حيث $\alpha$ عدد حقيقي .

أ ــ $v_{n+1} = 4u_{n+1} + \alpha = 4(3u_n - 4) + \alpha$ ؛

$v_{n+1} = 12u_n - 16 + \alpha = 12\left(\frac{v_n - \alpha}{4}\right) - 16 + \alpha$ ؛

$v_{n+1} = 3v_n - 16 - 2\alpha$

تكون المتتالية $(v_n)$ هندسية إذا وفقط إذا كان $\alpha = -8$ .

ب ــ $v_n = 4u_n - 8$ ومنه $v_0 = 4u_0 - 8 = 3$ ،

$v_n = 3^{n+1}$ ؛ $u_n = \dfrac{v_n + 8}{4} = \dfrac{3^{n+1}+8}{4}$.

**ج ـ** $(u_n)$ متزايدة إذن محدودة من الأسفل بـ $u_0 = \dfrac{11}{4}$

ولدينا $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ إذن $(u_n)$ ليست محدودة من الأعلى وبالتالي هي ليست محدودة.

**د ـ** نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ ،

$w_n = u_0 + \dfrac{u_1}{4} + \dfrac{u_2}{4^2} + \ldots + \dfrac{u_n}{4^n}$ .

$w_n = \dfrac{3+8}{4} + \dfrac{3^2+8}{4^2} + \dfrac{3^3+8}{4^3} + \ldots + \dfrac{3^{n+1}+8}{4^{n+1}}$ ،

$$w_n = \left(\frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) + 8\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^{n+1}}\right)$$

$$w_n = \frac{3}{4}\,\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}} + \frac{8}{4}\,\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}$$ ،

$$w_n = 3\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) + \frac{8}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$$ ،

$\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 3 + \dfrac{8}{3} = \dfrac{17}{3}$ إذن $(w_n)$ متقاربة .

## 5 - المتتاليتان المتجاورتان .

**133** لتكن $(u_n)$ و $(v_n)$ المتتاليتين المعرفتين على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$ و $v_n = u_n + \dfrac{1}{n \times n!}$.

1) ليكن $n$ عددا طبيعيا ، $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)!}$ ومنه

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!}$ وبالتالي $u_{n+1} - u_n > 0$ إذن

$(u_n)$ متزايدة تماما .

ليكن $n$ عددا طبيعيا ،

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)\times(n+1)!} - \frac{1}{n \times n!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\times(n+1)!} - \frac{1}{n \times n!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)\times n!} + \frac{1}{(n+1)\times(n+1)\times n!} - \frac{1}{n \times n!}$$

$$= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)^2 \times n!}$$

$$= \frac{n^2 + n + n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)^2 \times n!} = \frac{-1}{n(n+1)^2 \times n!}$$

إذن $v_{n+1} - v_n < 0$ وبالتالي $(v_n)$ متناقصة تماما .

$v_n = u_n + \dfrac{1}{n \times n!}$ معناه $v_n - u_n = \dfrac{1}{n \times n!}$ ومنه

$\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n \times n!} = 0$ .

خلاصة : $(u_n)$ و $(v_n)$ متتاليتان متجاورتان .

2) بما أن $(u_n)$ متزايدة و $(v_n)$ متناقصة فإنه من أجل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، $u_n \le l \le v_n$ أي

$u_n \le l \le u_n + \dfrac{1}{n \times n!}$

لكي يكون $u_n$ قيمة مقربة بالنقصان إلى $10^{-3}$ للعدد $l$

يكفي أن يكون $\dfrac{1}{n \times n!} \le 10^{-3}$ أي $n \times n! \ge 1000$

لدينا $5 \times 5! = 600$ و $6 \times 6! = 4320$ وهذا يبين أن $u_6$ هو أقرب قيمة بالنقصان إلى $10^{-3}$ للعدد $l$ .

$u_6 = \dfrac{1957}{720}$ , $u_6 \simeq 2{,}718055556$

**134** $u_0 = 0$ ، $v_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ :

$u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{4}$ و $v_{n+1} = \dfrac{3v_n + 1}{4}$ .

1) الخاصية الابتدائية $u_0 \le 1 \le v_0$ ؛ نفرض $u_k \le 1 \le v_k$

معناه $3u_k \le 3 \le 3v_k$ ومعناه $3u_k + 1 \le 4 \le 3v_k + 1$

أي $\dfrac{3u_k + 1}{4} \le 1 \le \dfrac{3v_k + 1}{4}$.

2) $u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n+1}{4}-u_n=\frac{1-u_n}{4}$ بما أن $u_n\le 1$ فإن $u_{n+1}-u_n\ge 0$ ومنه $(u_n)$ متزايدة.

$v_{n+1}-v_n=\frac{3v_n+1}{4}-v_n=\frac{1-v_n}{4}$ بما أن $1\le v_n$ فإن $v_{n+1}-v_n\le 0$ ومنه $(v_n)$ متناقصة.

$u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{3u_n+1}{4}-\frac{3v_n+1}{4}=\frac{3}{4}(u_n-v_n)$ ومنه المتتالية $(w_n)$ المعرفة بـ $w_n=u_n-v_n$ هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ وعليه $u_n-v_n=(u_0-v_0)\left(\frac{3}{4}\right)^n$ إذن

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}2\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$ ؛ إذن $(u_n)$ و $(v_n)$ متجاورتان .

$u_{n+1}=\frac{3u_n+1}{4}$ معناه $4u_{n+1}-3u_n=1$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}(4u_{n+1}-3u_n)=1$ أي $l=1$ .

**135** $u_0=1$ ، $v_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}$ ، $v_{n+1}=\frac{u_n+4v_n}{5}$ .

1) ليكن $n$ عددا طبيعيا ، $w_{n+1}=u_{n+1}-v_{n+1}$

$$=\frac{u_n+2v_n}{3}-\frac{u_n+4v_n}{5}=\frac{2u_n-2v_n}{15}$$

أي $w_{n+1}=\frac{2}{15}(u_n-v_n)=\frac{2}{15}w_n$ ، إذن $(w_n)$ هندسية أساسها $\frac{2}{15}$ وحدها الأول $w_0=u_0-v_0=-1$ وبما أن $-1<\frac{2}{15}<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=0$ . $w_n=-\left(\frac{2}{15}\right)^n$ .

2) لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}$ إذن $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+2v_n}{3}-u_n=\frac{-2u_n+2v_n}{3}$ أي $u_{n+1}-u_n=-\frac{2}{3}(u_n-v_n)=-\frac{2}{3}w_n$ .

وكذلك لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_{n+1}=\frac{u_n+4v_n}{5}$ ومنه $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+4v_n}{5}-v_n$ أي $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n-v_n}{5}=\frac{w_n}{5}$ .

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $w_n<0$ إذن $u_{n+1}-u_n>0$ و $v_{n+1}-v_n<0$ ومنه $(u_n)$ متزايدة تماما و $(v_n)$ متناقصة تماما.

بما أن $(u_n)$ متزايدة ، $(v_n)$ متناقصة و $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=0$ فإن $(u_n)$ و $(v_n)$ متجاورتان وبالتالي لهما نفس النهاية العدد الحقيقي $l$ .

4) من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $t_n=3u_n+10v_n$ ومنه

$$t_{n+1}-t_n=3u_{n+1}+10v_{n+1}-3u_n-10v_n$$
$$=3(u_{n+1}-u_n)+10(v_{n+1}-v_n)=-2w_n+2w_n=0$$

وبالتالي المتتالية $(t_n)$ ثابتة .

ومنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ , $t_n=t_0$ أي $3u_n+10v_n=3u_0+10v_0=23$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}(3u_n+10v_n)=23$ هذا من جهة. ومن جهة أخرى $\lim\limits_{n\to+\infty}(3u_n+10v_n)=3l+10l=13l$ إذن $13l=23$ وبالتالي $l=\frac{23}{13}$ .

**136** $u_0=3$ ، $v_0=4$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$ ؛ $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+v_n}{2}$ .

1) $u_1=\frac{7}{2}$ ، $v_1=\frac{15}{4}$ ، $u_2=\frac{29}{8}$ و $v_2=\frac{59}{16}$ .

2) من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، نضع : $w_n=v_n-u_n$ .

$$w_{n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{u_{n+1}+v_n}{2}-u_{n+1}=\frac{v_n-u_{n+1}}{2}$$

$w_{n+1}=\frac{v_n-u_n}{4}=\frac{1}{4}w_n$ إذن $(w_n)$ هندسية .

$$\lim_{n\to+\infty}w_n=\lim_{n\to+\infty}w_0\left(\frac{1}{4}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$$

3) $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+v_n}{2}-u_n=\frac{v_n-u_n}{2}=\frac{w_n}{2}$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_{n+1}+v_n}{2}-v_n=\frac{u_{n+1}-v_n}{2}=\frac{u_n-v_n}{4}$$

بما أن $v_{n+1}-v_n=-\frac{w_n}{4}$ و $w_n>0$ فإن $(u_n)$ متزايدة تماما و $(v_n)$ متناقصة تماما .

ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=0$ إذن $(u_n)$ و $(v_n)$ مجاورتان .

4) تحذف **(برهن أن)** من المعطيات .

$$t_{n+1}=\frac{1}{3}(u_{n+1}+2v_{n+1})=\frac{1}{3}(2u_{n+1}+v_n)$$

$t_{n+1}=\frac{1}{3}(u_n+2v_n)=t_n$ إذن $(t_n)$ متتالية ثابتة .

$$\lim_{n\to+\infty}t_n=t_0=\frac{1}{3}(u_0+2v_0)=\frac{11}{3}$$

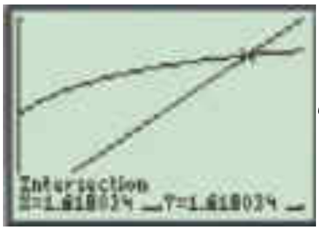
و $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=\frac{1}{3}(l+2l)=l$ إذن $l=\frac{11}{3}$ .

**137** $f$ معرفة على $[0;2]$ بِــ : $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$ .

1) $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$ ومنه $f$ متزايدة تماما على $[0;2]$

وبالتالي إذا كان $1\le x\le 2$ فإن $f(1)\le f(x)\le f(2)$ أي $\frac{3}{2}\le f(x)\le\frac{5}{3}$ ومنه $f(x)\in[1;2]$.

2) $u_0=1$ ، $v_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_{n+1}=f(u_n)$ ؛ $v_{n+1}=f(v_n)$ .




يبدو أن $(u_n)$ متزايدة و $(v_n)$ متناقصة ولهما نفس النهاية وهي فاصلة نقطة تقاطع المنحنيين .

3) البرهان بالتراجع عن الخواص :

* " $1\le u_n\le 2$ " ؛ $u_0=1$ ومنه $1\le u_0\le 2$

إذا كان $1\le u_k\le 2$ فإن $1\le f(u_k)\le 2$ أي $1\le u_{k+1}\le 2$ .

* " $1\le v_n\le 2$ " ؛ نفس البرهان.

* " $u_n\le u_{n+1}$ " ؛ $u_0=1$ و $u_1=\frac{3}{2}$ إذن $u_0\le u_1$ .

إذا كان $u_k\le u_{k+1}$ فإن $f(u_k)\le f(u_{k+1})$ لأن $f$ متزايدة ومنه $u_{k+1}\le u_{k+2}$.

* " $v_n\ge v_{n+1}$ " ؛ نفس البرهان.

4) من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا :

$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{2v_n+1}{v_n+1}-\frac{2u_n+1}{u_n+1}=\frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}.$$

$1\le u_n\le 2$ و $1\le v_n\le 2$ إذن $2\le u_n+1\le 3$ و $2\le v_n+1\le 3$ ومنه $4\le(u_n+1)(v_n+1)\le 9$،

إذن $v_n-u_n$ و $v_{n+1}-u_{n+1}$ لهما نفس الإشارة ؛

استعمال التراجع : $v_0-u_0=1$ ومنه $v_0-u_0\ge 0$ ، وإذا كان $v_k-u_k\ge 0$ فإن $v_{k+1}-u_{k+1}\ge 0$.

لدينا $4\le(u_n+1)(v_n+1)\le 9$ ومنه $0<\frac{1}{(u_n+1)(v_n+1)}\le\frac{1}{4}$ بما أن $v_n-u_n\ge 0$ فإن $\frac{v_n-u_n}{(u_n+1)(v_n+1)}\le\frac{1}{4}(v_n-u_n)$ أي $v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{4}(v_n-u_n)$ .

استعمال التراجع لإثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $v_n-u_n\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$ .

لدينا $v_0-u_0=1$ و $\left(\frac{1}{4}\right)^0=1$ إذن $v_0-u_0\le\left(\frac{1}{4}\right)^0$

نفرض أن $v_k-u_k\le\left(\frac{1}{4}\right)^k$ .

$v_{k+1}-u_{k+1}\le\frac{1}{4}(v_k-u_k)\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^k$.

لدينا $0 \le v_n - u_n \le \left(\frac{1}{4}\right)^n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ إذن

$\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$ وحسب السؤال 3) لدينا $u_n \le u_{n+1}$

و $v_n \ge v_{n+1}$ معناه $(u_n)$ متزايدة و $(v_n)$ متناقصة إذن

$(u_n)$ و $(v_n)$ متجاورتان وبالتالي لهما نفس النهاية $l$ .

$u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+1}$ معناه $u_{n+1}u_n + u_{n+1} - 2u_n - 1 = 0$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}u_n + u_{n+1} - 2u_n - 1) = 0$ أي

$l^2 - l - 1 = 0$ ومعناه $l = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ أو $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

بينما $1 \le u_n \le 2$ و $1 \le v_n \le 2$ إذن $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

**138** $a$ و $b$ عددان حقيقيان حيث $0 < a < b$ .

المتتاليتان $(u_n)$ و $(v_n)$ معرفتان بـ : $u_0 = a$ ، $v_0 = b$

ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ ، $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

1) نسمي $p_n$ الخاصية " $0 < u_n \le v_n$ "

لدينا $u_0 = a$ ، $v_0 = b$ و $0 < a < b$ إذن

$0 < u_0 \le v_0$ ومنه الخاصية $p_0$ صحيحة .

نفرض أن الخاصية $p_k$ صحيحة أي $0 < u_k \le v_k$

لدينا $u_k v_k > 0$ إذن $\sqrt{u_k v_k} > 0$ وبالتالي $0 < u_{k+1}$ .

لدينا $(u_k + v_k)^2 - (u_k - v_k)^2 = 4u_k v_k$ معناه

$(u_k + v_k)^2 \ge 4u_k v_k$ بما أن $0 < u_k \le v_k$ فإن

$u_k + v_k > 0$ ومنه $u_k + v_k \ge 2\sqrt{u_k v_k}$ معناه

$\frac{u_k + v_k}{2} \ge \sqrt{u_k v_k}$ أي $v_{k+1} \ge u_{k+1}$ وبالتالي :

$0 < u_{k+1} \le v_{k+1}$ إذن الخاصية $p_{k+1}$ صحيحة .

وحسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ،

الخاصية $p_n$ أي $0 < u_n \le v_n$ .

2) ليكن $n$ عددا طبيعيا

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{u_n}^2 + \sqrt{v_n}^2 - 2\sqrt{u_n}\sqrt{v_n}}{2} = \frac{\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)^2}{2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)\left(\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}\right)}{2\left(\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)}{\left(\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}\right)}(v_n - u_n)$$

$-\sqrt{u_n} < \sqrt{u_n}$ ومنه $\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n} < \sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}$

إذن $\frac{\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}} < 1$

وبالتالي $\frac{1}{2}(v_n - u_n)\frac{\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

أي $v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$ .

نستعمل التراجع ولدينا الخاصية $v_0 - u_0 \le \frac{1}{2^0}(b - a)$

تكافئ $v_0 - u_0 \le (b - a)$ وهي صحيحة .

نفرض أن الخاصية $v_k - u_k \le \frac{1}{2^k}(b - a)$ ولنبرهن

صحة الخاصية $v_{k++} - u_{k+1} \le \frac{1}{2^{k+1}}(b - a)$

لدينا مما سبق $v_{k+1} - u_{k+1} < \frac{1}{2}(v_k - u_k)$ ومن فرضية

التراجع $v_k - u_k \le \frac{1}{2^k}(b - a)$ ينتج أن

$\frac{1}{2}(v_k - u_k) \le \frac{1}{2^{k+1}}(b - a)$ إذن

$v_{k+1} - u_{k+1} \le \frac{1}{2^{k+1}}(b - a)$ وحسب مبدأ التراجع ينتج

أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $v_n - u_n \le \frac{1}{2^n}(b - a)$.

3) لدينا كل حدود المتتالية $(u_n)$ موجبة تماما إذن ندرس $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ .

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{u_n v_n}}{\sqrt{u_n}^2} = \frac{\sqrt{v_n}}{\sqrt{u_n}}$ بما أن $0 < u_n \le v_n$ فإن

$0 < \sqrt{u_n} \le \sqrt{v_n}$ ومنه $\frac{\sqrt{v_n}}{\sqrt{u_n}} \ge 1$ أي $\frac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1$

وبالتالي $(u_n)$ متزايدة .

بما أن $v_{n+1}-v_n=\dfrac{u_n+v_n}{2}-v_n=\dfrac{u_n-v_n}{2}$

$0<u_n\le v_n$ فإن $u_n-v_n\le 0$ أي $v_{n+1}-v_n\le 0$

وبالتالي $(v_n)$ متناقصة .

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n$ ،

$0\le v_n-u_n\le\dfrac{1}{2^n}(b-a)$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^n}(b-a)=0$

إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$ .

خلاصة : المتتاليتان $(u_n)$ و $(v_n)$ متجاورتان .

4) $a=2$ و $b=5$ ,إذن $v_n-u_n\le\dfrac{3}{2^n}$ .

$\dfrac{3}{2^n}<10^{-3}$ معناه $2^n>3000$ ولدينا $2^{11}=2048$

و $2^{12}=4096$ إذن $n\ge 12$

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| u | 2 | 3,1623 | 3,32686 | 3,3289968 | 3,3289971 | 3,328997 |
| v | 5 | 3,5 | 3,33114 | 3,3289975 | 3,3289971 | 3,328997 |

| | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|
| u | 3,3289971 | 3,328997 | 3,328997 | 3,3289971 | 3,329 |
| v | 3,3289971 | 3,328997 | 3,328997 | 3,3289971 | 3,329 |

والعدد $l\simeq 3,329$ هو النهاية المشتركة لِـ $(u_n)$ و $(v_n)$.

**139** $u_0=-1$، $v_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$،

$u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}$ ؛ $v_{n+1}=\dfrac{u_n+4v_n}{5}$ .

1) أ ــ $u_0<v_0$ صحيحة . من أجل $k$ عدد طبيعي ،

$u_k<v_k$ معناه $u_k-v_k<0$ . لدينا

$u_{k+1}-v_{k+1}=\dfrac{u_k+v_k}{2}-\dfrac{u_k+4v_k}{5}=\dfrac{3u_k-3v_k}{10}$

أي $u_{k+1}-v_{k+1}=\dfrac{3}{10}(u_k-v_k)$ إذن $u_{k+1}-v_{k+1}<0$

ب ــ $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n+v_n}{2}-u_n=\dfrac{v_n-u_n}{2}$

لدينا $u_n<v_n$ معناه $v_n-u_n>0$ إذن $u_{n+1}-u_n>0$

وبالتالي $(u_n)$ متزايدة تماما.

$v_{n+1}-v_n=\dfrac{u_n+4v_n}{5}-v_n=\dfrac{u_n-v_n}{5}$ ومنه

$v_{n+1}-v_n<0$ إذن $(v_n)$ متناقصة تماما.

$u_{n+1}-v_{n+1}=\dfrac{3}{10}(u_n-v_n)$

نضع $w_n=u_n-v_n$ ، $(w_n)$ هندسية أساسها $\dfrac{3}{10}$ ومنه

إذن $w_n=u_n-v_n=(u_0-v_0)\left(\dfrac{3}{10}\right)^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$ ؛ ومنه $(u_n)$ و $(v_n)$ متجاورتان .

2) من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، نضع $x_n=u_n+av_n$

و $y_n=u_n+bv_n$ حيث $a$ و $b$ عددين حقيقيين متمايزين.

$x_{n+1}=u_{n+1}+av_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}+a\dfrac{u_n+4v_n}{5}$

$x_{n+1}=\dfrac{(2a+5)u_n+(8a+5)v_n}{10}$

$x_{n+1}=\dfrac{(2a+5)}{10}\left(u_n+\dfrac{8a+5}{2a+5}v_n\right)$

$(x_n)$ هندسية معناه $\dfrac{8a+5}{2a+5}=a$ أي $2a^2-3a-5=0$

وكذلك $(y_n)$ هندسية معناه $2b^2-3b-5=0$

إذن $a$ و $b$ هما الحلان المتمايزان للمعادلة

$2x^2-3x-5=0$ أي $a=-1$ و $b=\dfrac{5}{2}$ أو $b=-1$

و $a=\dfrac{5}{2}$.

نفرض $a=-1$ و $b=\dfrac{5}{2}$ إذن

$x_{n+1}=\dfrac{3}{10}(u_n-v_n)=\dfrac{3}{10}x_n$

و $y_{n+1}=\left(u_n+\dfrac{5}{2}v_n\right)=y_n$ .

لدينا $x_0=u_0-v_0=-3$ و $y_0=u_0+\dfrac{5}{2}v_0=4$ إذن

$x_n=-3\left(\dfrac{3}{10}\right)^n$ و $y_n=y_0=4$.

3) إيجاد النهاية المشتركة للمتتاليتين $(u_n)$ و $(v_n)$.

لدينا $x_n=u_n+av_n$ و $y_n=u_n+bv_n$ أي

$x_n=u_n-v_n=-3\left(\dfrac{3}{10}\right)^n$ و $y_n=u_n+\dfrac{5}{2}v_n=4$

ومنه $\frac{7}{2}v_n=4+3\left(\frac{3}{10}\right)^n$ أي $v_n=\frac{8}{7}+\frac{6}{7}\left(\frac{3}{10}\right)^n$ إذن $\lim_{n\to+\infty}v_n=\frac{8}{7}$

## مسائل

**140** لتكن $(E)$ مجموعة المتتاليات غير المعدومة $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ والتي تحقق الخاصية التالية :

$u_{n+2}=\frac{3}{35}u_{n+1}+\frac{2}{35}u_n$.

1) $(u_n)$ ثابتة معناه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ،

$u_n=\frac{3}{35}u_n+\frac{2}{35}u_n$ معناه $\frac{6}{7}u_n=0$ أي $u_n=0$.

$(u_n)$ حسابية ذات الأساس $r$ معناه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ،

$u_n+2r=\frac{3}{35}(u_n+r)+\frac{2}{35}u_n$ أي $u_n=-\frac{67}{30}r$

ومنه $(u_n)$ ثابتة أي $u_n=0$.

$(u_n)$ هندسية ذات الأساس $q$ معناه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ،

$u_nq^2=\frac{3}{35}(u_nq)+\frac{2}{35}u_n$ ومعناه

$u_n(35q^2-3q-2)=0$ أي $u_n=0$ أو $q=-\frac{2}{5}$

أو $q=\frac{4}{7}$.

بما أن $(E)$ هي مجموعة المتتاليات غير المعدومة فإنه لا توجد فيها متتالية ثابتة ولا متتالية حسابية ؛ بينما توجد متتاليتان هندسيتان في المجموعة $(E)$ أساسهما $q=-\frac{2}{5}$

و $q=\frac{4}{7}$.

2) ليكن $\alpha$ و $\beta$ عددين حقيقيين،

$$\frac{3}{35}u_{n+1}+\frac{2}{35}u_n=\frac{3}{35}\left[\alpha\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}+\beta\left(\frac{-1}{5}\right)^{n+1}\right]+$$

$$+\frac{2}{35}\left[\alpha\left(\frac{2}{7}\right)^n+\beta\left(\frac{-1}{5}\right)^n\right]$$

$$=\frac{1}{35}\alpha\left(\frac{2}{7}\right)^n\left(\frac{6}{7}+2\right)+\frac{1}{35}\beta\left(\frac{-1}{5}\right)^n\left(\frac{-3}{5}+2\right)$$

$$=\alpha\left(\frac{2}{7}\right)^n\left(\frac{4}{49}\right)+\beta\left(\frac{-1}{5}\right)^n\left(\frac{1}{25}\right)$$

$$=\alpha\left(\frac{2}{7}\right)^{n+2}+\beta\left(\frac{-1}{5}\right)^{n+2}=u_{n+2}$$

إذن المتتالية $(u_n)$ هي عنصر من المجموعة $(E)$ .

3) $u_0=3$ معناه $\alpha+\beta=3$ و $u_1=-\frac{4}{35}$ معناه

$\frac{2}{7}\alpha-\frac{1}{5}\beta=-\frac{4}{35}$ أي $10\alpha-7\beta=-4$ وبالتالي نجد

$\alpha=1$ و $\beta=2$ أي $u_n=\left(\frac{2}{7}\right)^n+2\left(\frac{-1}{5}\right)^n$.

$-1<\frac{2}{7}<1$ و $-1<\frac{-1}{5}<1$ إذن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^n=0$

و $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-1}{5}\right)^n=0$ وبالتالي $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$ .

**141** I – 1) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق ومن أجل كل

$x\geq 0$ لدينا $f'(x)=1-x-\frac{1}{1+x}=\frac{-x^2}{1+x}$ ومنه

$f'(x)\leq 0$ إذن الدالة $f$ متناقصة تماما على $[0;+\infty[$.

الدالة $g$ قابلة للاشتقاق ومن أجل كل $x\geq 0$ لدينا

$g'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}$ ومنه $g'(x)\leq 0$ إذن

الدالة $g$ متناقصة تماما على $[0;+\infty[$ .

2) لدينا $f(0)=0$ وإذا كان $x>0$ فإن

$f(x)<f(0)$ أي $f(x)<0$ وبالتالي من أجل كل

$x\geq 0$ ، $f(x)\leq 0$ أي $x-\frac{1}{2}x^2-\ln(1+x)\leq 0$

معناه $x-\frac{1}{2}x^2\leq\ln(1+x)$ .

لدينا $g(0)=0$ وإذا كان $x>0$ فإن $g(x)<g(0)$

أي $g(x)<0$ وبالتالي من أجل كل $x\geq 0$ ,

$g(x)\leq 0$ أي $\ln(1+x)-x\leq 0$ معناه

$\ln(1+x)\leq x$ .

خلاصة: من أجل كل $x \ge 0$ ، $x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$

$II - 1)$ لدينا $u_1 = \frac{3}{2}$ ومنه $u_1 > 0$ . نفرض أن $u_n > 0$ بما أن $1+\frac{1}{2^{n+1}} > 0$ فإن $u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) > 0$ ومنه $u_{n+1} > 0$ إذن حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، $u_n > 0$ .

2) $\ln u_1 = \frac{3}{2}$ و $\ln\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$ إذن $\ln u_1 = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)$ . نفرض أن

$$\ln u_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

ولدينا

$$\ln u_{n+1} = \ln u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) = \ln u_n + \ln\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

ومنه :

$$\ln u_{n+1} = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

وبالتالي حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ،

$$\ln u_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

3) ليكن $k$ عددا طبيعيا حيث $1 \le k \le n$ , نضع $x = \frac{1}{2^k}$ العلاقة $(1)$ تصبح

$$\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{4^k} \le \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \le \frac{1}{2^k}$$

وعدد هذه العلاقات هو $n$ لأن $k$ يتغير من 1 إلى $n$ وبجمع أطراف كل العلاقات نحصل على

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \le \ln u_n \le S_n$$

4) أ - $S_n$ و $T_n$ هما مجموعان لحدود متتابعة لمتتاليتين هندسيتين أساسهما $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$ على الترتيب .

$$S_n = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2}-1} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ ؛}$$

$$T_n = \frac{1}{4}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ .}$$

ب - $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$ ؛

$\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{3}$ .

5) أ - ليكن $n$ عددا طبيعيا غير معدوم , لدينا ، $u_{n+1} - u_n = u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) - u_n = \frac{1}{2^{n+1}}\times u_n$

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ , $\frac{1}{2^{n+1}} > 0$ و $u_n > 0$ (من السؤال 1) إذن $\frac{1}{2^{n+1}}\times u_n > 0$ أي $u_{n+1} - u_n > 0$ وبالتالي $(u_n)$ متزايدة تماما .

**ب -** لدينا $S_n = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، $S_n \le 1$ بما أن $\ln u_n \le S_n$ فإن $\ln u_n \le 1$ ومنه $u_n \le e$ إذن المتتالية $(u_n)$ محدودة من الأعلى وبما أنها متزايدة تماما فإنها متقاربة .

**جـ -** بما أن $(u_n)$ متقاربة فإنه يوجد عدد حقيقي $l$ حيث $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ ؛ لدينا $S_n - \frac{1}{2}T_n \le \ln u_n \le S_n$ ومنه

أي $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(S_n - \frac{1}{2}T_n\right) \le \lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n \le \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

$1 - \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} \le \ln l \le 1$ معناه $\frac{5}{6} \le \ln l \le 1$ ويكافئ $e^{\frac{5}{6}} \le l \le e$ .

**142** $(u_n)$ و $(v_n)$ معرفتان من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ بـ :

$$u_n = \sin\frac{1}{n^2} + \sin\frac{2}{n^2} + \ldots + \sin\frac{n}{n^2}$$

و $v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}$ .

1) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ ، $v_n = \frac{1}{n^2}(1+2+\ldots+n) = \frac{n(n+1)}{2n^2}$

أي $v_n=\frac{n+1}{2n}$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$ .

2) $f: x\mapsto x-\sin x$ ؛ من أجل كل $x$ من المجال $[0;+\infty[$ ، $f'(x)=1-\cos x$ ومنه $f'(x)\geq 0$
إذن $f$ متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ ولدينا $f(0)=0$ وإذا كان $x>0$ فإن $f(x)>f(0)$ أي $f(x)>0$ وبالتالي الدالة $f$ موجبة .

$g: x\mapsto -1+\frac{x^2}{2}+\cos x$ ؛ من أجل كل $x\in[0;+\infty[$ ،
$g'(x)=x-\sin x=f(x)$ بما أن $f$ موجبة فإن $g'(x)\geq 0$ وبالتالي $g$ متزايدة تماما ولدينا $g(0)=0$
وإذا كان $x>0$ فإن $g(x)>g(0)$ أي $g(x)>0$
وبالتالي الدالة $g$ موجبة .

$h: x\mapsto -x+\frac{x^3}{6}+\sin x$ ؛ من أجل كل $x\in[0;+\infty[$ ،
$h'(x)=-1+\frac{x^2}{2}+\cos x=g(x)$ بما أن $g$ موجبة فإن $h'(x)\geq 0$ وبالتالي $h$ متزايدة تماما ولدينا
$h(0)=0$ وإذا كان $x>0$ فإن $h(x)>h(0)$ أي $h(x)>0$ وبالتالي الدالة $h$ موجبة .

3) ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ ، من أجل كل عدد طبيعي $k$ حيث $1\leq k\leq n$ لدينا $1\leq k^3\leq n^3$ أي $1^3\leq n^3$ ، $2^3\leq n^3$ ، ... ، $n^3\leq n^3$ وبالجمع طرفا إلى طرف نحصل على
$1^3+2^3+...+n^3\leq n\times n^3$ أي $1^3+2^3+...+n^3\leq n^4$.
لدينا من أجل كل عدد حقيقي موجب $x$ ، $f(x)\geq 0$
و $h(x)\geq 0$ معناه $x\geq \sin x$ و $\sin x\geq x-\frac{x^3}{6}$
أي $x-\frac{x^3}{6}\leq \sin x\leq x$ . نضع $x=\frac{k}{n^2}$ ومنه
$\frac{x^3}{6}=\frac{k^3}{6n^6}$ إذن $\frac{k}{n^2}-\frac{k^3}{6n^6}\leq \sin\frac{k}{n^2}\leq\frac{k}{n^2}$
وبالجمع نحصل على :

$$\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{n}{n^2}-\frac{1}{6n^6}\left(1^3+2^3+...+n^3\right)\leq \sin\frac{1}{n^2}+$$
$$\sin\frac{2}{n^2}+...+\sin\frac{n}{n^2}\leq\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{n}{n^2}$$

أي $v_n-\frac{1}{6n^6}\left(1^3+2^3+...+n^3\right)\leq u_n\leq v_n$

ولدينا $1^3+2^3+...+n^3\leq n^4$ معناه
$-\frac{1}{6n^6}\left(1^3+2^3+...+n^3\right)\geq -\frac{1}{6n^6}n^4$
ومعناه $v_n-\frac{1}{6n^6}\left(1^3+2^3+...+n^3\right)\geq v_n-\frac{1}{6n^2}$ إذن
$v_n-\frac{1}{6n^2}\leq u_n\leq v_n$ .

4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{6n^2}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\frac{1}{2}$ ومنه
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n-\frac{1}{6n^2}=\frac{1}{2}$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\frac{1}{2}$ .
إذن المتتالية $(u_n)$ متقاربة ، ونهايتها $\frac{1}{2}$ .

**143** $I$ – $f$ معرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{x\ln x}{x+1}$.

1) من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $g'(x)=1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}$
ومنه $g'(x)>0$ إذن الدالة $g$ متزايدة تماما .
$g$ مستمرة على $]0;+\infty[$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=-\infty$
و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$
خلاصة : المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\beta$ .
لدينا : $g(0,27)\simeq$ -0.039 و $g(0,28)\simeq 0.007$ إذن
$0,27\leq\beta\leq 0,28$

2) من أجل $x>0$ لدينا
$f'(x)=\frac{(\ln x+1)(x+1)-x\ln x}{(x+1)^2}=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$ .
$f'(\beta)=0$ ومن أجل $x\in]-\infty;\beta[$ ، $f'(x)<0$
ومن أجل $x\in]\beta;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ .

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{x\ln x}{x+1}=0$$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$
أي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ .

$II$ – 1) نلاحظ أن $f(1)=0$ ولدينا $g(\beta)=0$ معناه
$\ln\beta=-1-\beta$ إذن $f(\beta)=\frac{\beta\ln\beta}{\beta+1}=-\beta$

الدالتان $x \mapsto x\sin x$ و $x \mapsto x+1$ مستمرتان على $]0;+\infty[$ و من أجل $x>0$ $x+1\neq 0$ إذن الدالة $f$ مستمرة على $]0;+\infty[$ ومنه جدول تغيراتها:

| $x$ | $0$ | | $\beta$ | | $1$ | | $\alpha_n$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | $0$ | + | ¦ | + | ¦ | + | |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $-\beta$ | ↗ | $0$ | ↗ | $n$ | ↗ | $+\infty$ |

إذن المعادلة $f(x)=n$ تقبل حلا وحيدا $\alpha_n$ .

2) أ - $f(e^n)=\frac{e^n\ln e^n}{e^n+1}=n\frac{e^n}{e^n+1}$ ولدينا

$e^n\le e^n+1$ أي $\frac{e^n}{e^n+1}\le 1$ ومعناه $\frac{ne^n}{e^n+1}\le n$ إذن $f(e^n)\le n$ .

بما أن $f(\alpha_n)=n$ فإن $f(e^n)\le f(\alpha_n)$ وبما أن $f$ متزايدة تماما على $]1;+\infty[$ فإن حتما يكون $e^n\le\alpha_n$.

ب - $f(\alpha_n)=n$ تكافئ $\frac{\alpha_n\ln\alpha_n}{\alpha_n+1}=n$ وتكافئ $\alpha_n\ln\alpha_n=n\alpha_n+n$ أي $\alpha_n(\ln\alpha_n-n)=n$ ومعناه

$\ln\alpha_n-\ln e^n=\frac{n}{\alpha_n}$ أي $\ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right)=\frac{n}{\alpha_n}\ldots(1)$

لدينا $e^n\le\alpha_n$ معناه $\frac{e^n}{n}\le\frac{\alpha_n}{n}$ بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^n}{n}=+\infty$

فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\alpha_n}{n}=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\alpha_n}=0$ إذن

$\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\frac{\alpha_n}{e^n}=0$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\alpha_n}{e^n}=1$ .

3) أ - $(2)$ معناه $1+\varepsilon_n=\frac{\alpha_n}{e^n}$ ومنه

$(1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n)=\frac{\alpha_n}{e^n}\ln\frac{\alpha_n}{e^n}$ ومن $(1)$ ينتج

$(1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n)=\frac{n}{e^n}$.

ب - الدالة $u:t\mapsto(1+t)\ln(1+t)-t$ تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا $u'(t)=\ln(1+t)+(1+t)\frac{1}{1+t}-1$

أي $u'(t)=\ln(1+t)$ ، من أجل $t\ge 0$ يكون

$(1+t)\ge 1$ ومنه $\ln(1+t)\ge 0$ إذن $u'(t)\ge 0$

وبالتالي $u$ متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ لدينا $u(0)=0$ ومن أجل $t>0$ يكون $u(t)>u(0)$ . إذن من أجل كل $t\ge 0$ , $u(t)\ge 0$ أي $0\le(1+t)\ln(1+t)-t$ .

الدالة $v:t\mapsto(1+t)\ln(1+t)-t-\frac{t^2}{2}$ تقبل الاشتقاق

ومن أجل كل $t\ge 0$ لدينا $v'(t)=\ln(1+t)-t$

$v''(t)=\frac{1}{1+t}-1=\frac{-t}{1+t}$ من أجل $t\ge 0$ يكون

$v''(t)\le 0$ إذن $v'$ متناقصة على $[0;+\infty[$ و $v'(0)=0$

إذن من أجل $t\ge 0$ يكون $v'(t)\le 0$

إذن $v$ متناقصة على $]0;+\infty[$ و $v(0)=0$ إذن من أجل $t\ge 0$ يكون $v(t)\le 0$ أي

$(1+t)\ln(1+t)-t-\frac{t^2}{2}\le 0$ معناه

$(1+t)\ln(1+t)-t\le\frac{t^2}{2}$.

خلاصة : من أجل كل $t\ge 0$ ,

$0\le(1+t)\ln(1+t)-t\le\frac{t^2}{2}$ .

جـ - نضع $t=\varepsilon_n$ يكون إذن

$0\le(1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n)-\varepsilon_n\le\frac{\varepsilon_n^2}{2}$ ولدينا

$(1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n)=\frac{n}{e^n}$ ،

إذن $0\le\frac{n}{e^n}-\varepsilon_n\le\frac{\varepsilon_n^2}{2}$ من المتباينة الأولى ينتج

$\varepsilon_n\le\frac{n}{e^n}$ ويكافئ $\varepsilon_n^2\le\frac{n^2}{e^{2n}}$ أي $\frac{\varepsilon_n^2}{2}\le\frac{n^2}{2e^{2n}}$ .

وبالتالي $0\le\frac{n}{e^n}-\varepsilon_n\le\frac{1}{2}\left(\frac{n}{e^n}\right)^2$ أي

$0\le ne^{-n}-\varepsilon_n\le\frac{n^2}{2}e^{-2n}$

د - $(3)$ تكافئ $0\le n-\varepsilon_n e^n\le\frac{n^2}{2}e^{-n}$ و $(2)$ تكافئ

$\varepsilon_n e^n=\alpha_n-e^n$ إذن $0\le n-\alpha_n+e^n\le\frac{n^2}{2}e^{-n}$

ولدينا $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{2}e^{-n}=\lim_{n\to+\infty}2\left(\frac{n}{2}\right)^2\left(e^{-\frac{1}{2}n}\right)^2=0$ إذن $\lim_{n\to+\infty}\left(e^n+n-\alpha_n\right)=0$

## اختبر معلوماتك

**اختيار من متعدد**

**144** نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة بـ $u_0=0$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $u_{n+2}=\frac{1}{3}u_{n+1}+\frac{2}{3}u_n$ .

**تصحيح إضافة** $u_1=1$.

$v_n=u_{n+1}-u_n$ و $w_n=u_{n+1}+\frac{2}{3}u_n$ .

1) **ب** - المتتالية $(w_n)$ حسابية أساسها 0 وحدها الأول 1.

**جـ** - المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $-\frac{2}{3}$ وحدها الأول 1.

**د** - المتتالية $(w_n)$ هندسية أساسها 1.

2) **أ** - $v_n=\left(-\frac{2}{3}\right)^n$. **جـ** - $w_n=1$ .

3) **أ** - $u_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$.

**ب** - $u_n=\frac{3}{5}(w_n-v_n)$ .

**د** - المتتالية $(u_n)$ متقاربة ونهايتها $\frac{3}{5}$ .

**145** 1) **ب** - $\frac{2n+(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}$ . **جـ** - $n\sin\frac{1}{n}$ و $n>0$.

2) **ب** - المتتالية $v$ محدودة من الأسفل.

**د** - لا يمكن معرفة إن كانت المتتالية $v$ تقبل نهاية أم لا .

**أصحيح أم خطأ ؟**

**146** 1) **صحيحة** لأن كل متتالية متناقصة هي محدودة من الأعلى بحدها الأول.

2) كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فتكون نهايتها معدومة ، **جملة خاطئة** لأن نهايتها موجبة ويمكن أن تكون غير معدومة مثلا المتتالية المعرفة بـــ $u_n=1+\frac{1}{n+1}$.

3) إذا كانت متتالية متزايدة فإنها محدودة من الأسفل بحدها الأول؛ والجملة المعطاة **صحيحة**.

4) الجملة **صحيحة**.

5) الجملة **صحيحة**.

6) جملة **خاطئة** لأنه يمكن أن تكون $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}v_n$ مثلا $u_n=\frac{1}{n+2}$ و $v_n=\frac{1}{n+1}$.

**148** $(u_n)$ معرفة على $\mathbb{N}$ بـــ : $u_0=1{,}5$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=2u_n-1$ .

1) **صحيحة** لأنه $u_{n+1}=f(u_n)$ و $f(x)=2x-1$، $f(x)=x$ معناه $x=1$.

2) $v_{n+1}=u_{n+1}-1=2u_n-2=2v_n$ إذن الجملة **صحيحة**.

3) $v_n=2^{n-1}$ ومنه $\lim_{n\to+\infty}v_n=+\infty$ وبالتالي المتتالية $(v_n)$ ليست محدودة من الأعلى ، والجملة المعطاة **خاطئة**

# الباب الثاني

# القسمة في مجموعة الأعداد الصحيحة

## الأنشطة

**النشاط الأول**

**تصحيح:** /

**الهدف:** مقاربة مفهوم القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$ .

**توجيهات:** يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$ " و يتم ضمن أفواج.

**الحل:** بسيط

**النشاط الثاني**

**تصحيح:** /

**الهدف:** توظيف القواسم و المضاعفات.

**توجيهات:** يقدم النشاط ضمن أفواج .

**الحل:** بسيط

**النشاط الثالث**

**تصحيح:** /

**الهدف:** مقاربة القاسم المشترك الأكبر.

**توجيهات:** يقدم النشاط كمدخل للفقرة " القاسم المشترك الأكبر " و يتم ضمن أفواج.

**الحل:** بسيط.

**النشاط الرابع**

**تصحيح:** /

**الهدف:** توظيف القواسم، المضاعفات، المربعات التامة، ....

**توجيهات: :** يقدم النشاط ضمن أفواج.

**الحل:** بسيط

# الأعمال الموجهة

**الثلاثيات الفيثاغورثية**

**تصحيح:** /

**الهدف:** توظيف القواسم.

**توجيهات:** يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

**الحل:** بسيط

**التفكير بواسطة الحاسوب**

**تصحيح:** /

**الهدف:** توظيف القواسم.

**توجيهات:** يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

**الحل:** بسيط

# التمارين

**تمارين تطبيقية**

**1 - قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$**

**1** مجموعة قواسم العدد 20 هي : $\{-20,-10,-5,-4,-2,-1,1,2,4,5,10,20\}$.

**2** مجموعة قواسم الموجبة للعدد 39 هي $\{1,3,13,39\}$

$(a,b)\in\{(1,39);(39,1);(3,13);(13,3)\}$ .

**3** لدينا $x^2-y^2=15$ تعني $(x-y)(x+y)=15$ ويكون العددان الصحيحان $x-y$ و $x+y$ من قواسم15.

**4** أ ـــ $(x-2)(y-3)=xy-3x-2y+6$.

ب ـــ $xy=3x+2y$ تعني $xy-3x-2y+6=6$ أي $(x-2)(y-3)=6$ ثم نستعمل قواسم 6.

**7** $-1027\le 53k\le 1112$ معناه $-19\le k\le 20$

عدد المضاعفات للعدد 53 المحصورة بين $-1027$ و 1112 هو 40.

**8** 1) $a = 7k$ و $7k < 50$ أي $k \leq 7$

$a \in \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49\}$.

2) $\frac{11a}{7a} = \frac{11}{7} = \frac{33}{21}$ حيث $a$ عدد صحيح غير معدوم ، $0 < 7a < 50$ معناه $0 < a \leq 7$ وبالتالي :

$$\frac{11}{7} = \frac{22}{14} = \frac{33}{21} = \frac{44}{28} = \frac{55}{35} = \frac{66}{42} = \frac{77}{49}$$

**9** 13 قاسم للعدد $n+4$ معناه $n+4 = 13k$ مع $k \in \mathbb{N}^*$ أي $n = 13k - 4$. $|n| \leq 22$ معناه $-24 \leq n \leq 22$

ويكافئ $-24 \leq 13k \leq 22$ ومعناه $-\frac{24}{13} \leq k \leq \frac{22}{13}$ أي $k \in \{-1, 0, 1\}$،

ومنه $n \in \{-17, -4, 9\}$.

**10** $12 = 2^2 \times 4$ , مجموعة قواسم 12 هي : $\mathscr{D}_{12} = \{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

| $5n+7$ | $-12$ | $-6$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $5n$ | $-19$ | $-13$ | $-11$ | $-10$ | $-9$ | $-8$ | $-6$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-1$ | 5 |
| $n$ | | | | $-2$ | | | | $-1$ | | | | 1 |

العدد $n+6$ يقبل القسم على $n$ معناه $n+6 = nk$ مع $k \in \mathbb{N}^*$ ويكافئ $6 = n(k-1)$ إذن $n$ يقسم 6 .

وبالتالي $n \in \{1; 2; 3; 6\}$. وبالعكس كل القيم المعينة تحقق المطلوب .

1) $34 = 2 \times 17$ ومنه مجموعة قواسم 34 هي :

$\mathscr{D}_{34} = \{-34, -17, -2, -1, 1, 2, 17, 34\}$ .

| $5n+6$ | $-34$ | $-17$ | $-2$ | $-1$ | 1 | 2 | 17 | 34 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $5n$ | $-40$ | $-23$ | $-8$ | $-9$ | $-5$ | $-4$ | 11 | 28 |
| $n$ | $-8$ | | | | $-1$ | | | |

2) $5n+6$ قاسم للعدد $n+8$ ومنه $5n+6$ يقسم $5n+40$ إذن $5n+6$ يقسم $(5n+40)-(5n+6)$ أي $5n+6$ يقسم 34 ومنه $n = -1$ أو $n = -8$ .

وبالعكس إذا كان $n = -1$ فإن 1 يقسم 7 وإذا كان $n = -8$ فإن $-34$ يقسم 0 إذن كلا النتيجتين تحقق المطلوب .

**14** $n$ عدد صحيح . نضع $a = 3n + 7$ و $b = 7n + 2$

إذا كان العدد $d$ قاسما لـ : $a$ و $b$ فإن $d$ يقسم $7a$ و $3b$

ومنه $d$ يقسم $7a - 3b = 49$.

**15** $n$ عدد طبيعي غير معدوما ويختلف عن العدد 1 .

$n^3 - n = n(n-1)(n+1)$. بعض القواسم للعدد $n^3 - n$ : 1 ، $n-1$، $n$، $n+1$، $n^2-n$، $n^2+n$، $n^2-1$،

$n^3 - n$

**17** ليكن $a$ و $b$ عددن صحيحين غير معدومين .

أ) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

ب) نفرض أن $a^3 + b^3 = 3k$ إذن

$(a+b)^3 = 3k + 3a^2b + 3ab^2 = 3(k + a^2b + ab^2)$

## 2 - القسمة الأقليدية

**18** تعيين باقي القسمة الأقليدية للعدد $a$ على $b$ :

أ - $a = 118$ و $b = 5$ . $118 = 5\times 23 + 3$ الباقي هو 3 .
ب - $a = 152$ و $b = 7$ . $152 = 7\times 21 + 5$ الباقي هو 5 .
جـ - $a = -118$ و $b = 5$ . $-118 = 5(-24) + 2$
د - $a = -152$ و $b = 7$ . $-152 = 7(-22) + 2$

**19** عين الأعداد الطبيعية $n = 41k + 5$ مع $41k + 5 < 100$ أي $k \le 2$ ومنه $n \in \{5, 46, 87\}$

**20** $a$ و $b$ عددان طبيعيان غير معدومين حيث $a = 17b + 3$ و $b > 3$ و $a = 23b + 27$،

إذن $6b - 24 = 0$ ومنه $b = 4$ و $a = 71$

**21** $n$ عدد طبيعي ، بقسمته على 7 أو على 3 نجد نفس الباقي أي $n = 7k + r$ و $n = 3k' + r$ مع $0 \le r < 3$ .

$n - r$ يقبل القسمة على 3 و 7 وهما عددان أوليان ،

إذن موجودين في تحليله وبالتالي 21 يكون قاسم له ،

أي $n - r = 21\alpha$ معناه $n = 21\alpha + r$ بما أن $0 \le r < 3$

فإن $n = 21\alpha$، $n = 21\alpha + 1$ أو $n = 21\alpha + 2$، $\alpha \in \mathbb{N}$ .

**24** $a$ و $b$ عددان طبيعيان غير معدومين حيث :

$a + b = 416$ و $a = bk + 61$ مع $b > 61$ .

ومنه $bk + 61 + b = 416$ أي $b(k+1) = 355$ إذن $b$ قاسم للعدد 355 ولدينا $355 = 5\times 71$ .قواسم 355 هي 1،

5، 71 و 355 بما أن $b > 61$ فإن $b = 71$ أو $b = 355$.

إذا كان $b = 71$ فإن $a = 416 - 71 = 345$.

إذا كان $b = 355$ $a = 416 - 355 = 61$.

**25** استعمال خوارزمية أقليدس لتعيين $PGCD(a,b)$:

أ - $a = 315$ و $b = 117$ . $315 = 117\times 2 + 81$
$117 = 81\times 2 + 36$ ؛ $81 = 36\times 2 + 9$ ؛ $36 = 9\times 4 + 0$ . ومنه $PGCD(315,117) = 9$ .

ب - $a = 1260$ و $b = 528$ . $1260 = 528\times 2 + 204$ ؛ $528 = 204\times 2 + 120$ ؛ $204 = 120\times 1 + 84$ ؛
$120 = 84\times 1 + 36$ ؛ $84 = 36\times 2 + 12$ ؛ $36 = 12\times 3 + 0$ ومنه $PGCD(1260,528) = 12$ .

جـ - $a = 1380$ و $b = 972$ .
$1380 = 972\times 1 + 408$ ؛ $972 = 408\times 2 + 156$ ؛
$408 = 156\times 2 + 96$ ؛ $156 = 96\times 1 + 60$ ؛ $96 = 60\times 1 + 36$ ؛ $60 = 36\times 1 + 24$ ؛ $36 = 24\times 1 + 12$ ؛
$24 = 12\times 2 + 0$ ومنه $PGCD(1380,972) = 12$ .

**26** $n$ عدد طبيعي غير معدوم .

$PGCD\left(n^2,n\right)=n$ ؛ $PGCD\left(3n,n\right)=n$

**27** البرهان أن مجموعة القواسم المشتركة للعددين $a$ و $b$ هي نفسها مجموعة قواسم العدد $p\gcd\left(a,b\right)$ .

نضع $\delta=p\gcd\left(a,b\right)$ .

كل عدد $d$ قاسم للعدد $\delta$ هو قاسم للعددين $a$ و $b$ لأن $\delta$ يقسم $a$ و $b$.

العكس نفرض أن $d$ قاسم للعددين $a$ و $b$ ومنه $a=\alpha d$ و $b=\beta d$ مع $\alpha$ و $\beta$ عددين طبيعيين غير معدومين .

إذا كان $p\gcd\left(\alpha,\beta\right)=1$ فإن $p\gcd\left(a,b\right)=d$ ومنه $d=\delta$ وبالتالي $d$ يقسم $\delta$ .

إذا كان $p\gcd\left(\alpha,\beta\right)=\lambda$ مع $\lambda\neq 1$ فإنه يوجد عددين طبيعيين غير معدومين وأوليين فيما بينهما $\alpha'$ و $\beta'$ حيث

$\alpha=\lambda\alpha'$ و $\beta=\lambda\beta'$ ومنه $a=d\lambda\alpha'$ و $b=d\lambda\beta'$ إذن $p\gcd\left(a,b\right)=d\lambda$ ومنه $\delta=d\lambda$ ومنه $d$ يقسم $\delta$.

**28**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 2 | 1 | 4 | |
| 792 | 456 | 336 | 120 | 96 | 24 | 0 |

إذن $PGCD\left(792,456\right)=24$ . لدينا $24=2^3\times 3$ .

ومنه مجموعة القواسم المشتركة للعددين 456 و 792 هي:

$\mathcal{D}_{24}=\left\{1,2,3,4,6,8,12,24\right\}$ .

**29** –

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 5 | |
| 448 | 308 | 140 | 28 | 0 |

إذن $PGCD\left(448,308\right)=28$ . لدينا $28=2^2\times 7$

-مجموعة القواسم المشتركة للعددين 448 و 308 هي : $\mathcal{D}_{28}=\left\{1,2,4,7,14,28\right\}$ .

$4294=nk+10$ و $3521=nk'+11$ ومنه

$4284=nk$ و $3510=nk'$ إذن $n$ هو قاسم للعددين 4284 و 3510 .

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 4 | 1 | 1 | 6 | 1 | 2 | |
| 4284 | 3510 | 774 | 414 | 360 | 54 | 36 | 18 | 0 |

$PGCD\left(4284,3510\right)=18$ ولدينا : $18=2\times 3^2$ .

إذن $n\in\left\{1,2,3,6,9,18\right\}$ .

**31** $n$ عدد طبيعي مكون من أربعة أرقام حيث:

$21685=nk+37$ و $33509=nk'+53$

ومنه $21648=nk$ و $33456=nk'$

إذن $n$ هو قاسم للعددين 21648 و 33456 لدينا $PGCD\left(33456,21648\right)=12\times PGCD\left(2788,1804\right)$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 1 | 5 | |
| 2788 | 1804 | 984 | 820 | 164 | 0 |

$PGCD\left(33456,21648\right)=12\times 164=1968$

$1968=2\times 984$ إذن القاسم الوحيد المكون من أربعة أرقام للعدد $PGCD\left(33456,21648\right)$ هو نفسه ؛

إذن $n=1968$ .

**32** (1

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 4 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 182 | 126 | 56 | 14 | 0 |

إذن $PGCD(182,126)=14$ .

2) استعمال خوارزمية أقليدس :

$182=126\times1+56$ معناه $182-126=56$

$126=56\times2+14$ معناه $126-56\times2=14$

إذن : $14=126-56\times2=126-(182-126)\times2$ أي $14=182(-2)+126\times3$ . إذن $\alpha=-2$ و $\beta=3$ .

## 3 ـ خواص القاسم المشترك الأكبر

**33** $1399=82\times17+5$ ومنه الباقي هو 5 .

$PGCD(1399,82)=PGCD(82,5)=1$

**34** تعيين القاسم المشترك الأكبر للعددين الصحيحين $a$ و $b$:

أ - $a=-350$ و $b=-252$ .

$PGCD(-350,-252)=PGCD(350,252)=14$

ب - $a=126$ و $b=-735$ .

$PGCD(126,-735)=PGCD(126,735)=21$

جـ - $a=-138$ و $b=575$ .

$PGCD(-138,575)=PGCD(138,575)=23$

**35** $PGCD(54,82)=2$

$PGCD(5400,8200)=100PGCD(54,82)=200$ .

**من التمرين 36 إلى التمرين 41 ، عيّن كل الثنائيات $(a,b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق الشرطين المقترحين.**

نضع : $PGCD(a,b)=d$ ونطبق الخاصية $a=da'$ ، $b=db'$ مع $a'$ و $b'$ أوليين فيما بينهما .

**36** $\begin{cases}a+b=54\\PGCD(a,b)=9\end{cases}$ معناه $\begin{cases}9(a'+b')=54\\p\gcd(a',b')=1\end{cases}$

ومعناه $\begin{cases}a'+b'=6\\p\gcd(a',b')=1\end{cases}$ ويكافئ $(a',b')$ تنتمي إلى $\{(1,5);(5,1)\}$ أي $(a,b)\in\{(9,45);(45,9)\}$ .

**37** $\begin{cases}a+b=72\\PGCD(a,b)=9\end{cases}$ ؛ $(a,b)\in\{(9,63);(27,45);(45,27);(63,9)\}$

**38** $\begin{cases}a+b=420\\PGCD(a,b)=84\end{cases}$ ؛ $(a,b)\in\{(84,336);(168,252);(252,168);(336,84)\}$

**39** $\begin{cases}ab=360\\PGCD(a,b)=6\end{cases}$ معناه $\begin{cases}36a'b'=360\\p\gcd(a',b')=1\end{cases}$

ومعناه $\begin{cases}a'b'=10\\p\gcd(a',b')=1\end{cases}$ ويكافئ $(a',b')\in\{(1,10);(2,5);(5,2);(10,1)\}$ أي

$(a,b)\in\{(6,60);(12,30);(30,12);(60,6)\}$

**40** $\begin{cases} ab = 2700 \\ PGCD(a,b) = 5 \end{cases}$ ؛ $(a,b) \in \{(5,540);(20,135);(20,135);(540,5)\}$

**41** $\begin{cases} a^2 - b^2 = 825 \\ PGCD(a,b) = 5 \end{cases}$ معناه $(a,b) = (85,80)$ أو $(a,b) = (35,28)$ .

أ - $a = 55$ و $b = 36$ ؛ $PGCD(36,55) = 1$ .

**42** ب- $a = 14$ و $b = 165$ ؛ $PGCD(165,14) = 1$.

جـ - $a = 1155$ و $b = 872$؛ $PGCD(1155,872) = 1$

في كل حالة نقول أن العددين $a$ و $b$ أوليان فيما بينهما .

**43** 1) $PGCD(140,143) = 1$

2) استنتج في كل حالة من الحالتين التاليتين :

أ ــ $\begin{cases} a = 140 \times 34 \\ b = 143 \times 34 \end{cases}$ و $PGCD(140,143) = 1$ معناه $PGCD(a,b) = 34$ .

ب ــ $\begin{cases} a = 143 \times 82 \\ b = 140 \times 82 \end{cases}$ و $PGCD(140,143) = 1$ معناه $PGCD(a,b) = 82$ .

**44** لأن 7 لا يقسم 500.

## تمارين للتعمق

### 1 - قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

**45** المسافة بين العمودين المتتاليين هي عدد طبيعي $x$ حيث $2 < x < 5$ وبالتالي : إمّا $x = 3$ وإما $x = 4$ . لدينا 4 لا يقسم 90 بينما 3 هو قاسم مشترك للعددين 90 و 156 ، ونأخذ قاسما مشتركا لأن كل زاوية القطعة يغرس عمود. إذن المسافة بين عموديين متتاليين هي $3m$ .

محيط القطعة هو $2(90+156) = 492m$ ولدينا عدد الأعمدة هو نفس عدد الفراغات الموجودة بين عمودين متتاليين أي $\frac{492}{3} = 164$

**46** قواسم 220 هي : 1، 2، 4، 5، 10، 11، 20، 22، 44، 55، 110، 220.

$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110 =$
$284$

قواسم 284 هي : 1 ، 2 ، 4 ، 71 ، 142 ، 284 .

$1+2+4+71+142 = 220$.

**47** ليكن $n$ عددا طبيعيا أكبر من أو يساوي 3.

لدينا $n + 5 = n - 2 + 7$ ومنه $n + 5$ مضاعف لِـ $n - 2$

معناه $n - 2$ قاسم للعدد 7 وبالتالي $n - 2 = 1$ أو $n - 2 = 7$ أي $n = 3$ أو $n = 9$ .

عكسيا إذا كان $n=3$ أو $n=9$ فإن $n+5=8$ أو $n+5=14$ و $n-2=1$ أو $n-2=7$ وبالتالي في كلا الحالتين $n+5$ مضاعف لِـ $n-2$.

**48** 1) قواسم 8 هي 1 ، 2 ، 4 ، 8 ؛ ومنه مجموع قواسم العدد 8 هو : 15.

قواسم 81 هي 1 ، 3 ، 9 ، 27 ، 81 ؛ ومنه مجموع قواسم العدد 81 هو : 121.

2) عدد قواسم 8 هو 4 وعدد قواسم 81 هو 5 إذن عدد قواسم العدد $8\times 81$ هو $4\times 5=20$.

**49** 1) $\dfrac{n+2}{n-1}=\dfrac{n-1+3}{n-1}=\dfrac{n-1}{n-1}+\dfrac{3}{n-1}$

$\dfrac{n+2}{n-1}=1+\dfrac{3}{n-1}$ وبالتالي لكي يكون $\dfrac{n+2}{n-1}$ عددا صحيحا يكفي أن يكون $\dfrac{3}{n-1}$ عددا صحيحا ولهذا يجب أن يكون العدد $(n-1)$ قاسما للعدد 3.

قواسم العدد 3 هي $-1$ ، $-3$ ، 1 و 3 وبالتالي $(n-1=-1)$ ، $(n-1=-3)$ ، $(n-1=1)$ أو $(n-1=3)$

معناه $(n=0)$ ، $(n=-2)$ ، $(n=2)$ أو $(n=4)$ وبما أن $n\in\mathbb{N}$ فإن قيمه الممكنة هي : 0 ، 2 و 4.

2) ليكن $\alpha$ و $\beta$ عددين طبيعيين حيث $a=2^{\alpha}\times 3^{\beta}$ ومنه $a^2=2^{2\alpha}\times 3^{2\beta}$ عدد قواسم $a^2$ هو $(2\alpha+1)(2\beta+1)$

وعدد قواسم $a$ هو $(\alpha+1)(\beta+1)$ ومن المعطيات لدينا : $(2\alpha+1)(2\beta+1)=3(\alpha+1)(\beta+1)$ معناه

$4\alpha\beta+2\alpha+2\beta+1=3\alpha\beta+3\alpha+3\beta+3$ ومعناه $\alpha\beta-\alpha=\beta+2$ يكافئ $\alpha(\beta-1)=\beta+2$ أي

$\alpha=\dfrac{\beta+2}{\beta-1}$. وحسب السؤال السابق ينتج أن $\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=4\end{cases}$ أو $\begin{cases}\alpha=4\\ \beta=2\end{cases}$ ؛ إذن $a=2^2\times 3^4=324$ أو $a=2^4\times 3^2=144$.

**50** $xy-4y-12=0$ إذا كان $x=4$ فإن المعادلة تصبح $-12=0$ وهذا غير ممكن إذن $x\neq 4$ .

$xy-4y-12=0$ معناه $y=\dfrac{12}{x-4}$ ومنه $x-4$ يقسم 12 ولدينا $12=2^2\times 3$ .

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-4$ | $-12$ | $-6$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 12 |
| $x$ | $-8$ | $-2$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 | 16 |
| $y$ | $-1$ | $-2$ | $-3$ | $-4$ | $-6$ | $-12$ | 12 | 6 | 4 | 3 | 2 | 1 |

**51** 1) ليكن $x\in[-3;1[\cup]1;3]$

$$f(x)=\frac{2x^2-3x-3}{x-1}=\frac{2x^2-3x+1-4}{x-1}$$

$$f(x)=\frac{(x-1)(2x-1)}{x-1}-\frac{4}{x-1}=2x-1-\frac{4}{x-1}$$

2) لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوي إحداثيتيها أعداد صحيحة . $M\in C_f$ معناه $x\in[-3;1[\cup]1;3]$

و $y=2x-1-\dfrac{4}{x-1}$ أي $y-2x+1=-\dfrac{4}{x-1}$ .

إذن $x-1$ يقسم 4

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-4$ | $-2$ | $-1$ | 1 | 2 | 4 |
| $y-2x+1$ | 1 | 2 | 4 | $-4$ | $-2$ | $-1$ |
| $x$ | $-3$ | $-1$ | 0 | 2 | 3 | $\cancel{5}$ |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-6$ | $-1$ | 3 | $-1$ | 3 | 8 |

**52** $n$ عدد طبيعي . نضع $a=n\left(n^2+5\right)$ .

1) إذا كان $n$ عددا زوجيا فإن $a$ عدد زوجي.

إذا كان $n$ عددا فرديا فإن $n=2k+1$ ومنه $n^2+5=4k^2+4k+6$ وهو عدد زوجي إذن $a$ عدد زوجي.

2) بنفس الطريقة نميز الحالات $n=3k$ ، $n=3k+1$ ، $n=3k+2$ .

**53** $a$ عدد طبيعي؛ للبرهان أن العدد $a\left(a^2-1\right)$ مضاعف للعدد 6 يكفي أن نبرهن $a\left(a^2-1\right)$ مضاعف لـِ 2 و 3 لأن 2 و 3 أوليان فيما بينهما ثم نميز الحالات.

**54** رقم آحاد العدد $n^5-n$ هو 0 معناه $n^5-n$ يقبل القسمة على 10 ولدينا من بين القواسم للعدد 10 قاسمين أوليين فقط هما 2 و 5.

$n^5-n=n\left(n^4-1\right)=n\left(n^2-1\right)\left(n^2+1\right)$ أي $n^5-n=n\left(n-1\right)\left(n+1\right)\left(n^2+1\right)$ .

لدينا $n\left(n+1\right)$ هو جداء عددين طبيعيين متواليين إذن هو عدد زوجي أي مضاعف لـِ 2 .

$n^5-n$ مضاعف لـِ $n\left(n+1\right)$ , و $n\left(n+1\right)$ مضاعف لـِ 2 إذن $n^5-n$ مضاعف لـِ2 .

لدينا كل عدد طبيعي $n$ هو إماّ مضاعفا لـِ 5 وإما ليس مضاعفا لـِ 5 .

إذا كان $n$ مضاعفا لـِ 5, بما أن $n^5-n$ مضاعف لـِ $n$ فإن $n^5-n$ مضاعف لـِ 5 .

إذا كان $n$ ليس مضاعفا لـِ 5 فإن بواقي قسمته على 5 هي 1 ، 2 , 3 , 4 .

إذا كان باقي قسمة $n$ على 5 هو 1 فإن $n-1$ يكون مضاعف لـِ 5 وبما أن $n^5-n$ مضاعف لـِ $n-1$ فإنه يكون مضاعف لـِ 5 .

إذا كان باقي قسمة $n$ على 5 هو 4 فإن $n+1$ يكون مضاعف لـِ 5 وبما أن $n^5-n$ مضاعف لـِ $n+1$ فإنه يكون مضاعف لـِ 5 .

إذا كان باقي قسمة $n$ على 5 هو $r$ حيث $r\in\{2;3\}$ فإن $n=5k+r$ ومنه $n^2=25k^2+10k+r^2$

أي $n^2+1=5\left(5k^2+2k\right)+r^2+1$

وبالتالي إذا كان $r\in\{2;3\}$ فإن $n^2+1=5\left(5k^2+2k\right)+5$ أو $n^2+1=5\left(5k^2+2k\right)+10$ إذن في الحالتين $n^2+1$ مضاعف لـِ 5 وبما أن $n^5-n$ مضاعف لـِ $n^2+1$ فإن $n^5-n$ مضاعف لـِ 5 .

إذن من أجل كل عدد طبيعي $n$، $n^5-n$ مضاعف لـ 5. وبالتالي تحليل العدد $n^5-n$ يشمل العددين الأوليين 2 و 5 إذن $n^5-n$ هو مضاعف للعدد 10 .

$n^{p+1}$ و $n^{p+5}$ لهما نفس رقم الآحاد معناه أن رقم آحاد $n^{p+5}-n^{p+1}$ هو 0 . $n^{p+5}-n^{p+1}=n^p\left(n^5-n\right)$ ومنه $n^{p+5}-n^{p+1}$ مضاعف للعدد 10.

**55** للبرهان أن من أجل كل عدد طبيعي $n$ يكون $n^7-n$ يقبل القسمة على 14 يكفي أن نبرهن أنه يقبل القسمة على 2 وعلى 7 لأن 2 و 7 أوليان فيما بينهما.

**56** 1) من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $a=n^2+5n+4=\left(n+1\right)\left(n+4\right)$ و $b=n^2+3n+2=\left(n+1\right)\left(n+2\right)$

إذن العدد $n+1$ هو قاسم مشترك للعددين $a$ و $b$ .

2) لدينا $3n^2+15n+20=(n+1)(3n+12)+8$

إذن العدد $n+1$ قاسما للعدد $3n^2+15n+20$ معناه العدد $n+1$ قاسما للعدد 8 ومنه $n+1\in\{1;2;4;8\}$ أي $n\in\{0;1;3;7\}$ .

وعكسيا بتعويض $n$ بقيم المجموعة $\{0;1;3;7\}$ نجد العدد $n+1$ قاسما للعدد $3n^2+15n+20$

**57** $n$ و $a$ عددان صحيحان حيث $a$ يقسم $n-1$ و $n^2+n+3$ .

أ - لدينا $n^2-2n+1=(n-1)^2$ و $a$ يقسم $n-1$ إذن $a$ يقسم $(n-1)^2$ أي $a$ يقسم $n^2-2n+1$ .

ب - $a$ يقسم $n^2+n+3$ و $n^2-2n+1$ إذن $a$ يقسم الفرق $(n^2+n+3)-(n^2-2n+1)$ أي يقسم $3n+2$.

جـ - $a$ يقسم $n-1$ ومنه $a$ يقسم $3n-3$ وبما أن $a$ يقسم $3n+2$ فإنه يقسم الفرق $(3n+2)-(3n-3)$ أي $a$ يقسم 5 .

د - $a\in\{-5;-1;1;5\}$.

**58** نفترض أن الثنائية $(x\,;y)$ يكون من أجلها العدد $xy$ قاسما للعدد $x+y$ إذن $x\neq 0$ و $y\neq 0$

ولدينا $x+y=xyk$ مع $k\in\mathbb{N}$ إذن $x=y\,(xk-1)$ و $y=x\,(yk-1)$ وبالتالي $x$ يقسم $y$ و $y$ يقسم $x$ إذن $x=y$ وبالتالي يصبح $2x=x^2k$ أي $2=xk$ ومنه $x$ يقسم 2 إذن $x=y=1$ أو $x=y=2$ .

وبالعكس الثنائيتين $(1,1)$ و $(2,2)$تحققان المطلوب.

**59** $n$ عدد طبيعي فردي . $S$ مجموع أعداد طبيعية متتابعة وعددها $n$ . نعتبر العدد الطبيعي $a$ ونضع $S=a+(a+1)+(a+2)+...+(a+n-1)$ هو مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها 1 .

$$S=\frac{n}{2}(a+(a+n-1))=n\left(a+\frac{n-1}{2}\right)$$

بما أن $n$ عدد طبيعي فردي فإن $n-1$ هو زوجي وبالتالي $\frac{n-1}{2}$ يكون عدد طبيعي ومنه $k=a+\frac{n-1}{2}$ هو عدد طبيعي ومنه $S=nk$ مع $k\in\mathbb{N}$ إذن العدد $S$ يقبل القسمة على $n$ .

## 2 - القسمة الأقليدية

**66** $71=0\times72+71$ إذن باقي القسمة الأقليدية للعدد 71 على 72 هو 71 .

**67** كتاب مكتوب عليه 4350 سطرا . كل صفحة تحمل 34 سطرا ماعدا الصفحة الأخيرة ناقصة .

$4350=34\times127+32$ إذن توجد بالكتاب 127 صفحة كاملة والصفحة الأخيرة مكتوب عليها 32 سطرا فقط .

**68** علما أنه يوجد عدد طبيعي $k$ حيث $100^{100}=13k+35$ . ولدينا $100^{100}=13k+26+9$

أي $100^{100}=13(k+2)+9$ بما أن $9<13$ فإن باقي قسمة $100^{100}$على 13 هو 9.

**69** الباقيان للقسمة الأقليدية لكل من العددين $m$ و $n$ على 17 هما على التوالي 8 و 12. أي $m=17k+8$ و $n=17p+12$ مع $k\in\mathbb{N}$ و $p\in\mathbb{N}$ .

$$m+n=17(k+p)+20=17(k+p+1)+3$$

إذن باقي قسمة $m+n$ على 17 هو 3 .

$m \times n = (17k + 8)(17p + 2)$

$m \times n = 17^2 kp + 17(2k + 8p) + 16$

$m \times n = 17(17kp + 2k + 8p) + 16$

إذن باقي قسمة $m \times n$ على 17 هو 16 .

$m^2 = (17k)^2 + 16 \times 17k + 64$

$m^2 = 17(17k^2 + 16k + 3) + 13$ .

إذن باقي قسمة $m^2$ على 17 هو 13.

**79** $2^{3\times 0} - 1 = 0$ وهو يقبل القسمة على 7 .

نفرض $2^{3p} - 1$ يقبل القسمة على 7أي $2^{3p} - 1 = 7k$ مع $k \in \mathbb{N}$ ولنبرهن $2^{3(p+1)} - 1$ يقبل القسمة على 7 .

$2^{3(p+1)} - 1 = 8 \times 2^{3p} - 1 = 8(7k + 1) - 1 = 56k + 7$

أي $2^{3(p+1)} - 1 = 7(8k + 1)$ومنه $2^{3(p+1)} - 1$ يقبل القسمة على 7. إذن حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، العدد $2^{3n} - 1$ يقبل القسمة على 7.

**أ -** من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، $2^{3n} - 1 = 7k$ مع $k \in \mathbb{N}$

أي $2^{3n} = 7k + 1$ إذن الباقي هو 1.

**ب -** $a = 2^{3n+1} = 2(7k + 1) = 7(2k) + 2$ إذن الباقي 2.

**جـ -** $a = 2^{3n+2} = 4(7k + 1) = 7(4k) + 4$ الباقي هو 3.

**80** إذا كان $d$ قاسما مشتركا للعددين $a$ و $b$ فهو قاسم $a^2$ وبالتالي هو قاسم للعدد $a^2 + b$ ومنه $d$ يكون قاسما مشتركا $a$ و $(a^2 + b)$.

إذا كان $d$ قاسما مشتركا للعددين $a$ و $(a^2 + b)$فهو قاسم $a^2$ وبالتالي هو قاسم للعدد $(a^2 + b) - a^2$أي قاسم للعدد $b$ ومنه $d$ يكون قاسما مشتركا للعددين $a$ و $b$ .

نستنتج من هذا أن القواسم المشتركة للعددين $a$ و $(a^2 + b)$ هي نفس القواسم المشتركة للعددين $a$ و $b$ .

وبالأخص $PGCD(a; a^2 + b) = PGCD(a; b)$ .

2) كل قاسم مشترك للعددين $a$ و $b$ هو قاسم لكل من الأعداد : $a + b$ ، $2a$ ، $3b$ و $2a + 3b$

إذن كل قاسم مشترك للعددين $a$ و $b$ هو قاسم مشترك للعددين $a + b$ و $2a + 3b$ .

وبالعكس لدينا كل قاسم مشترك للعددين $a + b$ و $2a + 3b$ هو قاسم لكل من الأعداد $3(a + b)$ ، $2(a + b)$ ، $3(a + b) - (2a + 3b)$ و $(2a + 3b) - 2(a + b)$ولدينا $3(a + b) - (2a + 3b) = a$ و $(2a + 3b) - 2(a + b) = b$

إذن كل قاسم مشترك للعددين $a + b$ و $2a + 3b$ هو قاسم مشترك للعددين $a$ و $b$

نستنتج من هذا أن القواسم المشتركة للعددين $a + b$ و $2a + 3b$ هي نفس القواسم المشتركة للعددين $a$ و $b$ .

وبالأخص $PGCD(a + b; 2a + 3b) = PGCD(a; b)$ .

**81** $n$ عدد طبيعي . $a = 11n + 3$ و $b = 13n - 1$ .

1) $13a - 11b = 13(11n + 3) - 11(13n - 1)$

$13a - 11b = 143n + 39 - 143n + 11 = 50$ .

2) $PGCD(a;b)$ يقسم $13a$ و $11b$ والفرق $13a-11b$ أي $PGCD(a;b)$ يقسم 50 .لدينا $50=2\times5^2$ , إذن $PGCD(a;b)$ ينتمي إلى المجموعة $\{1,2,5,10,25,50\}$ .

3) تعيين ثنائية $(a;b)$ بحيث يكون $PGCD(a;b)=50$ .

50 يقسم $a$ و $b$ ومنه يقسم $6a$ و $5b$ وكذلك $6a-5b$

أي 50 يقسم $n+23$ ومعناه $n+23=50k$ مع $k\in\mathbb{N}^*$

ومعناه $n=50k-23$ وبأخذ $k=1$ نجد $n=27$ ومنه $(a;b)=(300;350)$

وبالعكس $a=300=6\times50$ و $b=350=7\times50$ ولدينا 6 و 7 أوليان فيما بينهما إذن $PGCD(a;b)=50$

**82** $\begin{cases}2a^2+b^2=20992\\ PGCD(a;b)=16\end{cases}$ معناه توجد $(a';b')$ من $\mathbb{N}^{*2}$ حيث $a=16a'$ , $b=16b'$ ؛ $a'$ و $b'$ أوليان فيما بينهما

من الفرضية الأولى نحصل على $2a'^2+b'^2=82$ ومعناه $b'^2=2(41-a'^2)$ إذن يجب $a'^2<41$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a'^2$ | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 |
| $b'^2$ | 80 | 74 | 64 | 50 | 32 | 10 |

إذن الثنائية الوحيدة $(a';b')$ هي $(3,8)$ ومنه $(a;b)=(48,128)$

**83** $a$ و $b$ عددان من $\mathbb{N}^*$ و $PGCD(a;b)=d$ .

توجد $(a';b')$ من $\mathbb{N}^{*2}$ حيث $a=da'$ , $b=db'$ ؛ $a'$ و $b'$ أوليان فيما بينهما ؛ $ab+5d^2=35d$ تصبح

$d^2(a'b'+5)=35d$ معناه $d(a'b'+5)=35$ ومنه $d$ يقسم 35و $a'b'=\frac{35}{d}-5$ ؛ قواسم 35 هي: $1,5,7,35$

إذا كان $d=35$ أو $d=7$ فإن $a'b'\leq0$ وهذا مرفوض

إذا كان $d=1$ فإن $a'b'=30$ ولدينا $30=2\times3\times5$

ومجموعة قواسم 30 هي : $\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$ ومنه : $(a';b')\in\{(1,30);(2,15);(3,10);(5,6);$
$(6,5);(10,3);(15,2);(30,1)\}$

إذا كان $d=5$ فإن $a'b'=2$ ؛ ومنه $(a';b')\in\{(1,2);(2,1)\}$ ومنه $(a;b)\in\{(5,10);(10,5)\}$ .

خلاصة : $(a;b)\in\{(1,30);(2,15);(3,10);(5,6);(6,5);(10,3);(15,2);(30,1);(5,10);(10;5)\}$ .

**84** 1) ليكن $d$ قاسما مشتركا لــ $a$ ، $b$ إذن هو قاسم لكل من $7a$ , $5b$ , $4a$ و $3b$ وبالتالي $d$ يقسم $7a-5b$ , $5b-7a$ , $4a-3b$ و $3b-4a$ أي $d$ قاسم مشترك لـ $|x|$ و $|y|$ .

العكس ليكن $d$ قاسما مشتركا لـ $x$ و $y$ إذن هو قاسم لكل من $4x$ , $7y$ , $3x$ و $5y$ وبالتالي $d$ قاسم للفرقين $4x-7y$ و $3x-5y$

لدينا $4x-7y=4(7a-5b)-7(4a-3b)=b$ و $3x-5y=3(7a-5b)-5(4a-3b)=a$

إذن $d$ قاسم مشترك لـ $a$ ، $b$ .

ومنه: مجموعة القواسم المشتركة للعددين $a$، $b$ هي نفسها مجموعة القواسم المشتركة للعددين $x$ و $y$ ؛ وبالأخص $PGCD(|x|;|y|)=PGCD(x;y)=PGCD(a;b)$ .

2) $\begin{cases}(7\alpha-5\beta)(4\alpha-3\beta)=1300\\ PGCD(\alpha;\beta)=5\end{cases}\ldots(1)$

نضع : $x=7\alpha-5\beta$ و $y=4\alpha-3\beta$ . وحسب السؤال 1) يكون $\alpha=3x-5y$ و $\beta=4x-7y$

ومنه $PGCD(\alpha;\beta)=5$ . $PGCD(x;y)=PGCD(\alpha;\beta)=5$ إذن (1) تصبح $\begin{cases} xy=1300 \\ PGCD(x;y)=5 \end{cases}$

$PGCD(x;y)=5$ معناه يوجد $x'$ و $y'$ عددان صحيحان غير معدومين حيث $|x'|$ و $|y'|$ و $x=5x'$ و $y=5y'$

ومنه $25x'y'=1300$ أي $x'y'=52$

$52=2^2\times 13$ وقواسمه هي 1, 2, 4, 13, 26 و 52

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x'$ | -52 | -13 | -2 | -1 | 1 | 2 | 13 | 52 |
| $y'$ | -1 | -2 | -13 | -52 | 52 | 13 | 2 | 1 |
| $x$ | -260 | -65 | -10 | -5 | 5 | 10 | 65 | 260 |
| $y$ | -5 | -10 | -65 | -260 | 260 | 65 | 10 | 5 |
| $\alpha$ | -755 | -145 | 295 | 1285 | -1285 | -295 | 145 | 755 |
| $\beta$ | -1005 | -190 | 415 | 1800 | -1800 | -415 | 190 | 1005 |

$(\alpha;\beta)\in\{(295,415);(1285,1800);(145,190);(755,1005)\}$

**من التمرين 85 إلى التمرين 88 ، برهن من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، أنّ العددين $a$ و $b$ أوليان فيما بينهما .**

**85** $a=n+3$ و $b=2n+7$ .

$d$ يقسم $a$ و $b$ إذن يقسم $2a$ وكذلك $b-2a$ ولدينا : $b-2a=1$ إذن $d$ يقسم 1 ومنه $d=1$ .

**86** $a=3n+4$ و $b=8n+11$ .

$d$ يقسم $a$ و $b$ إذن يقسم $8a$ و $3b$ وكذلك $3b-8a$ ولدينا : $3b-8a=1$ إذن $d$ يقسم 1 ومنه $d=1$ .

**87** $a=9n+7$ و $b=5n+4$ .

$d$ يقسم $a$ و $b$ إذن يقسم $5a$ و $9b$ وكذلك $9b-5a$ ولدينا : $9b-5a=1$ إذن $d$ يقسم 1 ومنه $d=1$ .

**88** $a=7n^2+2$ و $b=4n^2+1$ .

$d$ يقسم $a$ و $b$ إذن يقسم $4a$ و $7b$ وكذلك $4a-7b$ ولدينا : $4a-7b=1$ إذن $d$ يقسم 1 ومنه $d=1$ .

**89** $n$ عدد طبيعي غير معدوم .

1) نضع $PGCD(2n-1;9n+4)=d$ إذن $d$ يقسم $(9n+4)$ و $(2n-1)$ ومنه $d$ يقسم $2(9n+4)$

و $9(2n-1)$ إذن $d$ يقسم $2(9n+4)-9(2n-1)$

بما أن $2(9n+4)-9(2n-1)=17$ فإن $d$ يقسم 17 أي $d=1$ أو $d=17$ .

2) إذا كان $PGCD(2n-1;9n+4)=17$ فإن 17 يقسم $(9n+4)$ و $(2n-1)$ ومنه 17 يقسم $4(2n-1)$

إذن 17 يقسم الفرق $(9n+4)-4(2n-1)=n+8$ .

3) إذا كان $PGCD(2n-1;9n+4)=17$ فإن 17 يقسم $n+8$ ومنه $n=17\alpha-8$ مع $\alpha\in\mathbb{N}^*$ .

لنبرهن العكس , نفرض أن $n=17\alpha-8$ مع $\alpha\in\mathbb{N}^*$

ومنه $9n+4=9(17\alpha-8)+4=9\times17\alpha-68$ و $2n-1=2(17\alpha-8)-1=2\times17\alpha-17$

أي : $9n+4=17(9\alpha-4)$ و $2n-1=17(2\alpha-1)$

نضع $PGCD(2\alpha-1;9\alpha-4)=\delta$ إذن $\delta$ يقسم $(2\alpha-1)$ و $(9\alpha-4)$ ومنه $\delta$ يقسم $9(2\alpha-1)$

و $2(9\alpha-4)$ إذن $\delta$ يقسم $2(9\alpha-4)-9(2\alpha-1)$

أي $\delta$ يقسم 1 وبالتالي $\delta=1$ .

$PGCD(2\alpha-1;9\alpha-4)=1$ ، $9n+4=17(9\alpha-4)$ و $2n-1=17(2\alpha-1)$ معناه

. $PGCD(2n-1;9n+4)=17$

خلاصة : $n=17\alpha-8$ مع $\alpha\in\mathbb{N}^*$ معناه $PGCD(2n-1;9n+4)=17$ .

**90** $n$ عدد طبيعي .

نضع $a=5n^2+14n+14$ ، $b=n+2$ و $c=5n+3$.

1) لدينا $5n^2+14n+8=(n+2)(5n+4)$ ومنه $b$ قاسم للعدد $5n^2+14n+8$ .

2) $b$ يقسم $a$ إذن $b$ يقسم $a-(5n^2+14n+8)$ أي $b$ يقسم 6 .

وبالعكس ، نفرض أن $b$ يقسم 6 بما أن $b$ يقسم $5n^2+14n+8$ فإنه يقسم المجموع $5n^2+14n+8+6$ أي $b$ يقسم $a$.

خلاصة : $b$ يقسم $a$ معناه $b$ يقسم 6 .

3) $b$ يقسم 6 معناه $n+2=1$ أو $n+2=2$ أو $n+2=3$ أو $n+2=6$ ومعناه $n=0$ أو $n=1$ أو $n=4$ .

ـــ إذا كان $n\in\{0,1,4\}$ فإن $b$ يقسم 6 أي $b$ يقسم $a$ ومنه باقي قسمة $a$ على $b$ هو 0 .

ـــ إذا كان $n=2$ فإن $a=62$ و $b=4$ إذن الباقي 2.

ـــ إذا كان $n=3$ فإن $a=101$ و $b=5$ إذن الباقي 1.

ـــ إذا كان $n>4$ فإن $b>6$ ولدينا $a=bc+6$ إذن باقي قسمة $a$ على $b$ هو 6 .

$c=5n+3$ ؛

ـــ إذا كان $n=0$ فإن $a=14$ و $c=3$ ومنه باقي قسمة $a$ على $c$ هو 2 .

من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $c>6$ ولدينا $a=cb+6$ إذن باقي قسمة العدد $a$ على $c$ هو 6 .

**91** 1) $n\in\mathbb{Z}-\{1\}$ نضع : $a=3n+5$ و $b=n-1$.

أ - لدينا $a-3b=3n+5-3n+3=8$ إذن $a=3b+8$

ب - $\frac{a}{b}=3+\frac{8}{b}$ . $\frac{a}{b}$ عددا صحيحا معناه $b$ يقسم 8

أي : $b\in\{-8;-4;-2;-1;1;2;4;8\}$ معناه $n\in\{-7;-3;-1;0;2;3;5;9\}$

2) نفرض أن $n$ عدد طبيعي .

أ - نضع $PGCD(a;b)=d$ . $d$ يقسم $a$ و $b$ إذن يقسم $3b$ ومنه يقسم $a-3b$ وبالتالي $d$ يقسم 8 .

ب - إذا كان $n=8k$ فإن $d$ يقسم $n$ ومنه $d$ يقسم $n-b$ أي $d$ يقسم 1 وبالتالي $d=1$ .

ـــ إذا كان $n=8k+1$ فإن $a=8(3k+1)$ و $b=8k$ إذن 8 يقسم $d$ وبما أن $d$ يقسم 8 فإن $d=8$ .

ـــ إذا كان $n=8k+2$ فإن $a=24k+11$ و $b=8k+1$ بما أن $d$ يقسم 8 , و $a$ و $b$ فرديان فإن $d=1$ .

ـــ إذا كان $n=8k+3$ فإن $a=2(12k+7)$ و $b=2(4k+1)$ ؛ نضع $d'=PGCD(12k+7;4k+1)$ $d'$ يقسم $3(4k+1)$ ومنه يقسم $12k+7-3(4k+1)$ أي يقسم 4 وبالتالي $d'$ يقسم $4k$ و $4k+1$ إذن يقسم فرقهما 1 وبالتالي $d'=1$ إذن $d=PGCD(a;b)=2$.

ـــ إذا كان $n=8k+4$ فإن $a=24k+17$ و $b=8k+3$

$a$ و $b$ فرديان بما أن $d$ يقسم 8 فإن $d=1$ .

ـــ إذا كان $n=8k+5$ فإن $a=4(3k+5)$ و $b=4(2k+1)$ ؛ إذا كان $d=8$ فإن $2k+1$ يقبل القسمة على 2 وهذا تناقض إذن $d=4$ .

ـــ إذا كان $n=8k+6$ فإن $a=24k+23$ و $b=8k+5$؛ $a$ و $b$ فرديان بما أن $d$ يقسم 8 فإن $d=1$

ـــ إذا كان $n=8k+7$ فإن $a=2(8k+13)$ $b=2(4k+3)$ ؛ $2k+3$ هو فردي , إذا كان $d=8$ أو $d=4$ فإن $2k+3$ يقبل القسمة على الأقل على 2 وهذا تناقض إذن $d=2$.

**92** (1 $n$ عدد طبيعي ، $\alpha=n^2+n$ و $\beta=n+2$ .

أ - نضع $PGCD(\alpha;\beta)=d$ و $PGCD(n;\beta)=d'$

$d$ يقسم $\alpha$ و $\beta$ إذن يقسم كذلك $n\beta$ ومنه يقسم $n\beta-\beta$ أي يقسم $n$ وبالتالي $d$ يقسم $PGCD(n;\beta)=d'$ .

العكس : $d'$ يقسم $n$ و $\beta$ إذن يقسم $n(n+1)$ أي يقسم $\alpha$ وبالتالي $d'$ يقسم $PGCD(\alpha;\beta)=d$.

$d$ يقسم $d'$ و $d'$ يقسم $d$ معناه $d=d'$ أي

$PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(n;\beta)$ .

ب - $d$ يقسم $n+2$ و $n$ إذن يقسم فرقهما 2 وبالتالي $PGCD(\alpha;\beta)=2$ أو $PGCD(\alpha;\beta)=1$ .

2) أ - $a=3n^3+5n^2+2n=(3n+2)(n^2+n)$

$b=3n^2+8n+4=(3n+2)(n+2)$

إذن العدد $(3n+2)$ هو قاسم مشترك للعددين $a$ و $b$ .

ب - لدينا $a=\alpha(3n+2)$ و $b=\beta(3n+2)$ .

ـــ إذا كان $n$ فرديا فإن $\beta$ يكون فرديا وبالتالي $d\neq 2$ إذن $d=PGCD(\alpha;\beta)=1$ ومنه $PGCD(a;b)=(3n+2)$ .

ـــ إذا كان $n$ زوجيا فإن $\alpha$ و $\beta$ زوجيان ومنه $d=2$

إذن يوجد عددان طبيعيان $\alpha'$ و $\beta'$ أوليان فيما بينهما حيث $\alpha=2\alpha'$ و $\beta=2\beta'$ أي $a=2(3n+2)\alpha'$ و $b=2(3n+2)\beta'$ ومنه $PGCD(a;b)=2(3n+2)$

جـ - $PGCD(a;b)=41$ هو عدد فردي إذن لا يمكن أن يكون $PGCD(a;b)=2(3n+2)=41$ ونأخذ الحالة المتبقية أي $PGCD(a;b)=(3n+2)=41$ معناه $n=13$ وبالتالي $\alpha=182$ و $\beta=15$ .

**93** $n$ عدد طبيعي ؛ نضع: $a=9n+1$ و $b=9n-1$

1) $a-b=2$ ؛ $PGCD(a;b)$ يقسم الفرق $a-b$ أي $PGCD(a;b)$ يقسم 2 هو إما 1 وإما 2.

ـــ إذا كان $n$ زوجيا فإن $a$ و $b$ يكونا فرديان وبالتالي $PGCD(a;b)=1$ .

ـــ إذا كان $n$ فرديا فإن $a$ و $b$ يكونا زوجيان ومنه يقبلان القسمة على 2 وبالتالي $PGCD(a;b)=2$ .

3) $81n^2-1=(9n+1)(9n-1)=ab$ وفي حالة $n$ عدد فردي ، $PGCD(a;b)=2$ معناه $a=2k$، $b=2k'$ و $p\gcd(k;k')=1$ إذن $ab=4kk'$ وبالتالي $81n^2-1=4k''$ معناه $81n^2=4k''+1$

إذن باقي قسمة العدد $81n^2$ على 4 هو 1 .

**المسائل**

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ نضع: $s_n = 1^3 + 2^3 + ... + n^3$.

في هذا التمرين يمكن استعمال النتيجة التالية :

$PGCD(a;b) = 1$ يكافئ $PGCD(a^2;b^2) = 1$ .

1) $s_n = 1^3 = 1$ و $\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1$ إذن $s_1 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$ ومنه الخاصية البدائية صحيحة .

نفرض $s_k = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$ من أجل $k \in \mathbb{N}^*$ ولنبرهن صحة الخاصية $s_{k+1} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$ .

$s_{k+1} = s_k + (k+1) = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3$ أي

$s_{k+1} = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}$ $s_{k+1} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$ .

وحسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، $s_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2) $k$ و $k+1$ عددان متواليان إذن هما أوليان فيما بينهما وبالتالي $PGCD(k;k+1) = 1$ .

ــ ليكن $k$ عدد طبيعي غير معدوم , $s_{2k} = \left(\frac{2k(2k+1)}{2}\right)^2$

أي $s_{2k} = k^2(2k+1)^2$ ؛ $s_{2k+1} = \left(\frac{(2k+1)(2k+2)}{2}\right)^2$

معناه $s_{2k+1} = (2k+1)^2(k+1)^2$ . بما أن $PGCD(k;k+1) = 1$ فإن $PGCD(k^2;(k+1)^2) = 1$

وبالتالي : $PGCD(s_{2k};s_{2k+1}) = (2k+1)^2$

3) $PGCD(2k+1;2k+3)$ يقسم الفرق الذي هو 2 إذن $PGCD(2k+1;2k+3) = 1$

أو $PGCD(2k+1;2k+3) = 1$ .

**97** $a$ عدد طبيعي غير معدوم .

1) دراسة المعادلة ذات المجهول العدد الطبيعي $a$ التالية: $9 + a^2 = 2^n$ حيث $n$ عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 4 .

**أ -** نفترض أن المعادلة تقبل حلا $a$ زوجيا ومنه 2 يقسم $a^2$ إذن يقسم الفرق $2^n - a^2$ وبالتالي 2 يقسم 9 وهذا تناقض إذن لا يمكن أن يكون $a$ زوجيا إذن يكون فرديا .

**ب -** نفترض أن المعادلة تقبل حلا $a$ إذن هو فردي ومنه باقي قسمة $a^2$ على 4 هو 1 أي $a^2 = 4k + 1$ مع $k \in \mathbb{N}$ ومنه $9 + 4k + 1 = 2^n$ أي $10 = 2^n - 4k$ . بما أن 4 يقسم $2^n$ وهذا من أجل $n \geq 4$ فإن 4 يقسم $2^n - 4k$ أي 4 يقسم 10 وهذا تناقض . إذن المعادلة لا تقبل حلول.

2) دراسة المعادلة ذات المجهول العدد الطبيعي $a$ التالية: $9 + a^2 = 3^n$ حيث $n$ عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 3.

**أ -** $3^2 - 1 = 8$ و 8 يقبل القسمة 4 إذن الخاصية البدائية صحيحة . نفرض أنه من أجل $k \in \mathbb{N}^*$ العدد $3^{2k} - 1$ يقبل القسمة على 4 أي $3^{2k} - 1 = 4P$ مع $p \in \mathbb{N}^*$ .

$3^{2(k+1)}-1=3^{2k+2}-1=9\times3^{2k}-1=9(4p+1)-1$

$3^{2(k+1)}-1=36p+8=4(9p+2)$ إذن $3^{2(k+1)}-1$ يقبل القسمة على 4 , وحسب مبدأ التراجع ينتج أنه من اجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ , $3^{2n}-1$ يقبل القسمة على 4 .

**ب -** لدينا $3^{2n}=4k+1$ حيث $k$ عدد طبيعي و $3\times3^{2n}=4(3k)+3$ أي $3^{2n+1}=4k'+3$ حيث $k'$ عدد طبيعي .

إذن الباقيان للقسمة الأقليدية لكل من العددين $3^{2n}$ و $3^{2n+1}$ على 4 هما 1 و 3 على الترتيب .

**جـ -** حسب السؤال السابق من أجل كل عدد طبيعي زوجي $n$ ، باقي قسمة $3^n$ على 4 هو 1 ومن أجل كل عدد طبيعي فردي $n$ ، باقي قسمة $3^n$ على 4 هو 3 إذن الباقي يختلف عن 2 .

نفترض أن المعادلة $9+a^2=3^n$ تقبل حلا $a$ فرديا إذن $a^2=4k+1$ مع $k\in\mathbb{N}$ ؛ ولدينا إذا كان $n$ فرديا فإن $3^n=4k'+1$ ومنه $9=4(k'-k)$ وهذا غير ممكن ؛ وإذا كان $n$ زوجيا فإن $3^n=4k'+3$ ومنه $7=4(k'-k)$ وهذا كذلك غير ممكن , ومنه إذا كان $a$ حلا للمعادلة فلا يمكنه أن يكون فرديا وبالتالي يكون $a$ زوجيا ، ومنه $a=2m$ وبالتالي $3^n=9+a^2=4(m+2)+1$ إذن باقي قسمة $3^n$ على 4 هو 1 وهذا في الحالة $n$ زوجي

**د -** $3^{2p}-a^2=(3^p-a)(3^p+a)$ .

نفترض أن المعادلة $9+a^2=3^n$ تقبل حلا $a$ فإن $n$ زوجي أي $n=2p$ و $a$ زوجي

ومنه $9=(3^p-a)(3^p+a)$ و $a$ زوجي.

قواسم العدد 9 هي 1 ، 3 و 9 إذن :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(3^p-a)$ | 1 | 3 | 9 |
| $(3^p+a)$ | 9 | 3 | 1 |
| $2a$ | 8 | 0 | $-8$ |
| $a$ | 4 | 0 | $-4$ |

إذا كان $a=0$ فإن $9=3^n$ أي $n=2$ ولكن $n\geq3$

وإذا كان $a=-4$ أو $a=4$ فإن $3^n=25$ وهذا غير ممكن.

3) دراسة المعادلة ذات المجهول العدد الطبيعي $a$ التالية : $9+a^2=5^n$ حيث $n$ عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 .

**أ -** نضع $n=2p+1$ ومنه $5^n=5\times5^{2p}$ ، الباقيان الممكنان لقسمة $5^p$ على 3 هما 1 أو 2 ومنه باقي قسمة $5^{2p}$ على 3 هو 1 وبالتالي باقي قسمة $5^n$ على 3 هو 2.

إذا كان $a=3k$ فإن باقي قسمة $9+a^2$ على 3 هو 0.

إذا كان $a=3k+1$ أو $a=3k+2$ فنجد باقي قسمة $9+a^2$ على 3 هو 1 إذن من أجل كل عدد طبيعي $a$ يكون باقي قسمة $9+a^2$ على 3 هو 0 أو 1 وبالتالي لا يوجد عدد طبيعي $a$ يحقق $9+a^2=5^n$ .

**ب -** في حالة $n$ زوجي ، يكتب على الشكل $n=2p$ ويكون لدينا $9=5^{2p}-a^2=(5^p-a)(5^p+a)$

والحالة الوحيدة هي $5^p+a=9$ و $5^p-a=1$ وهذا يعني $2\times5^p=10$ و $a=9-5^p$ أي $p=1$ و $a=4$

98 1) **أ -** إذا كان $d$ قاسم للعددين $a^p-1$ و $a^{p+1}-1$ فإنه يقسم فرقهما $a^{p+1}-a^p$ أي $d$ يقسم العدد $a^p(a-1)$ .

**ب -** نفرض $PGCD(4^{p+1}-1,4^p-1)=D$ ومنه $D=4^i$ أو $D=3$ أو $D=3\times4^i$ مع $i\in\{0,1,...,p\}$

ولدينا $D$ لا يمكن أن يكون زوجيا وبالتالي $D=1$ أو $D=3$ .

2) **أ -** $u_2=5$ ، $u_3=21$ و $p\gcd(5;21)=1$ .

**ب -** استعمال التراجع للبرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=4u_n+1$.

**جـ -** البرهان بالتراجع نجد ، من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n$ هو عدد طبيعي .

**د -** $PGCD\left(u_{n+1}, u_n\right)=1$ .

3) **أ -** ليكن $n$ عددا طبيعيا، $v_{n+1}=u_{n+1}+\frac{1}{3}=4u_n+\frac{4}{3}$

$v_{n+1}=4\left(v_n-\frac{1}{3}\right)+\frac{4}{3}=4v_n$ إذن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها 4 وحدها الأول $v_0=u_0+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ .

**ب -** $v_n=\frac{4}{3}\times 4^n$ ومنه $u_n=\frac{4}{3}\times 4^n-\frac{1}{3}=\frac{4^{n+1}-1}{3}$

**جـ -** لدينا $4^{n+1}-1=3u_n$ و $4^{n+2}-1=3u_{n+1}$ وحسب السؤال 2) لدينا $PGCD\left(u_{n+1}, u_n\right)=1$ وهذا معناه $PGCD\left(4^{n+2}-1, 4^{n+1}-1\right)=3$ .

**99** 1) $x^2+y^2=4$ ... $E$ معناه $(2-x)(2+x)=y^2$

إذن يجب أن يكون $2-x>0$ أي $x=1$ ونجد $y^2=3$

إذن لا يوجد عدد طبيعي $y$ يحقق المعادلة $E$.

2) أ - نفترض أن العددين $x$ و $y$ زوجيان أي $x=2n$ و $y=2m$ إذن $p^2=2\left(n^2+m^2\right)$ وبالتالي 2 يقسم $p^2$ ومنه يقسم $p$ وهذا تناقض لأن $p$ أولي $p\neq 2$ أي $p$ عدد فردي .

نفترض أن العددين $x$ و $y$ فرديان أي $x=2n+1$ و $y=2m+1$ إذن $p^2=2\left(2n^2+2n+2m^2+2m+1\right)$

وهذا كذلك تناقض إذن $x$ و $y$ أحدهما زوجي والآخر فردي .

**ب -** نفترض أن $p$ يقسم $x$ أي $x=kp$ إذن $y^2=p^2\left(1-k^2\right)$ حالتين ممكنتين $k=1$ أو $k=0$ أي $x=0$ أو $y=0$ ولكن $x$ و $y$ غير معدومين

وبنفس الطريقة إذا افترضنا $p$ يقسم $y$؛

إذن $p$ لا يقسم $x$ ولا $y$.

**جـ -** نضع $PGCD\left(x^2, y^2\right)=d$ ؛ $d$ يقسم المجموع $x^2+y^2$ أي $d$ يقسم $p^2$ .

**د -** $d=1$ أو $d=p$ ، أو $d=p^2$ بما أن $p$ لا يقسم $x$ ولا $y$ فإن $d\neq p$ ، أو $d\neq p^2$ وبالتالي $d=1$ .

3)أ - $\left(u^2-v^2\right)^2+(2uv)^2=u^4+v^4-2u^2v^2+4u^2v^2$

$\left(u^2-v^2\right)^2+(2uv)^2=u^4+v^4+2u^2v^2=\left(u^2+v^2\right)^2$ و $\left(u^2-v^2\right)^2+(2uv)^2=p^2$ وهذا هو المطلوب .

**ب -** $p=5$ معناه $p=1^2+2^2$ إذن $(3,4)$ هي حل لـ $E$

$p=13$ معناه $p=3^2+2^2$ إذن $(5,12)$ هي حل لـ $E$.

4) **أ -** $p=3$ ؛ إذا افترضنا أن $u^2+v^2=3$ فإن $u^2=3-v^2$ ويجب أن يكون $v^2<3$ وبالتالي $v=1$ ثم نجد $u^2=2$ و 2 ليس مربعا تاما إذن 3 ليس مجموع مربعين .

$x^2+y^2=9$ معناه $y^2=9-x^2$ ومنه يجب أن يكون $x^2=1$ أو $x^2=4$ وعليه $y^2=8$ أو $y^2=5$ و 8 و 5 ليسا مربعين إذن المعادلة لا تقبل حلا .

**ب -** $p=7$ ؛ إذا افترضنا أن $u^2+v^2=7$ فإن $u^2=7-v^2$ ويجب أن يكون $v^2<7$ وبالتالي $v=1$ أو $v=2$ ثم نجد $u^2=6$ أو $u^2=3$ و 6 و 3 ليسا مربعين تامين إذن 7 ليس مجموع مربعين .

$x^2+y^2=49$ معناه $y^2=49-x^2$ ومنه يجب أن يكون $x^2=1$ أو $x^2=4$ أو $x^2=9$ أو $x^2=16$ أو $x^2=25$ أو $x^2=36$ وعليه $y^2=48$ أو $y^2=45$ أو $y^2=40$ أو $y^2=33$ أو $y^2=24$ أو $y^2=13$ وفي كل حالة $y$ ليسا عددا طبيعيا إذن المعادلة لا تقبل حلا .

**100** (1 $M_0(x_0;y_0)$ ؛ $M_0(1;8)$ ولدينا $5(1)-8+3=0$ ومنه المعادلة محققة إذن $M_0\in(\Delta)$.

نفرض أن $M_k\in(\Delta)$ أي $5x_k-y_k+3=0$ .

لنبرهن $M_{k+1}\in(\Delta)$ .

لدينا $\begin{cases} 5x_{k+1}=\dfrac{35}{3}x_k+\dfrac{5}{3}y_k+5 \\ -y_{k+1}=-\dfrac{20}{3}x_k-\dfrac{8}{3}y_k-5 \end{cases}$ ومنه $5x_{k+1}-y_{k+1}=5x_k-y_k$ أي $5x_{k+1}-y_{k+1}+3=5x_k-y_k+3$

معناه $5x_{k+1}-y_{k+1}+3=0$ إذن $M_{k+1}\in(\Delta)$

وبالتالي حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $M_n\in(\Delta)$ .

ــ ليكن $n$ عدد طبيعي ، $M_n\in(\Delta)$ معناه $5x_n-y_n+3=0$ أي $5x_n+3=y_n$ بالتعويض في المعادلة الأولى للجملة نجد $x_{n+1}=\dfrac{7}{3}x_n+\dfrac{1}{3}(5x_n+3)+1$ ومعناه $x_{n+1}=4x_n+2$ .

(2 $x_0=1$ ومنه $x_0\in\mathbb{N}$ ؛ نفرض $x_k\in\mathbb{N}$ ومنه $4x_k\in\mathbb{N}$ إذن $(4x_k+2)\in\mathbb{N}$ والتالي $x_{k+1}\in\mathbb{N}$ .

إذن حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $x_n\in\mathbb{N}$.

ــ لدينا $5x_n+3=y_n$ بما أن $x_n\in\mathbb{N}$ فإن $(5x_n+3)\in\mathbb{N}$ وبالتالي $y_n\in\mathbb{N}$ .

(3 $PGCD(x_n;y_n)=d$ إذن يوجد عددان طبيعيان غير معدومين وأوليين فيما بينهما $x$ و $y$ حيث $x_n=dx$ و $y_n=dy$ . لدينا الثنائية $(x_n;y_n)$ تحقق معادلة $(\Delta)$ إذن $5x_n-y_n+3=0$ ومنه $d(5x-y)+3=0$ أي $3=d(y-5x)$ إذن $d$ قاسم للعدد 3 أي $d\in\{1;3\}$ .

(4 $x_0=\dfrac{5}{3}\times4^0-\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{3}-\dfrac{2}{3}=1$ وهذا صحيح .

نفرض أن $x_k=\dfrac{5}{3}\times4^k-\dfrac{2}{3}$ ولنبرهن $x_{k+1}=\dfrac{5}{3}\times4^{k+1}-\dfrac{2}{3}$.

لدينا $x_{k+1}=4x_k+2=4\left(\dfrac{5}{3}\times4^k-\dfrac{2}{3}\right)+2$ $x_{k+1}=\dfrac{5}{3}\times4^{k+1}-\dfrac{8}{3}+2=\dfrac{5}{3}\times4^{k+1}-\dfrac{2}{3}$ .

إذن حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$, $x_n=\dfrac{5}{3}\times4^n-\dfrac{2}{3}$ .

ــ مما سبق ينتج $3x_n=5\times4^n-2$ إذن 3 قاسم للعدد $5\times4^n-2$ . لدينا 2 يقسم $4^n$ ومنه 2 يقسم $5\times4^n$ وبالتالي 2 يقسم $5\times4^n-2$ إذن 2 و 3 موجودان في تحليل العدد $5\times4^n-2$ إذن 6 قاسم للعدد $5\times4^n-2$.

## اختبر معلوماتك

### اختيار من متعدد

**101** 1) ب - $r=5$

2) جـ - $46=13\times3+7$ .

3) ب - $70=11\times6+4$ .

**102** 1) ب - $PGCD(a;12)$ هو 1 أو 3؛

لأن $a-12b=15$ تعني أن $a-12(b+1)=3$

ومنه $PGCD(a;12)$ هو قاسم للعدد 3 .

2) جـ - العدد $a$ هو جداء عددين أوليين في ما بينهما ،

لأن $a=2835=3^4\times5\times7=81\times45$ ؛ 81 و 45 أوّليان فيما بينهما.

3) ب - يوجد كسر مساويا لـِ $F$ مقامه من قوى العدد 15 لأن $F=\frac{4487}{14175}=\frac{7\times641}{3^4\times5^2\times7}=\frac{5^2\times641}{(3\times5)^4}$

**103** جـ - $PGCD(n;n+1)=1$ .

## أصحيح أم خطأ ؟

**104** 1) خاطئة. 2) صحيحة. 3) صحيحة.

4) خاطئة. 5) خاطئة. 6) خاطئة.

**105** 1) خاطئ. 2) صحيح. 3) صحيح. 4) صحيح. 5) خاطئ. 6) خاطئ.

**106** حيحة. 2) خاطئة. 3) صحيحة.

4) خاطئة. 5) صحيحة. 6) خاطئة.

# الباب الثالث

## الموافقات في مجموعة الأعداد الصحيحة

# الأنشطة

**النشاط الأول**
**تصحيح:** /
**الهدف:** اكتشاف بعض خواص القسمة الإقليدية على5.
**توجيهات:** يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " الموافقات في $\mathbb{Z}$ ". و يتم ضمن أفواج مع استعمال جهاز الداتاشو.
**الحل:** يكفي تعيين معامل التوجيه ثم تطبيق المبرهنات حول المشتقات.
**النشاط الثاني**
**تصحيح:** /
**الهدف:** توظيف المتتاليات، القواسم و البواقي.
**توجيهات:** يقدم النشاط ضمن أفواج
**الحل:** بسيط
**النشاط الثالث**
**تصحيح:** /
**الهدف:** مقاربة مفهوم أنظمة التعداد.
**توجيهات:** يقدم النشاط كمدخل للفقرة " التعداد " و يتم ضمن أفواج.
**الحل:** بسيط.
**النشاط الرابع**
**تصحيح:** /
**الهدف:** توظيف الموافقات.
**توجيهات:** يقدم النشاط ضمن أفواج.
**الحل:** بسيط.

# الأعمال الموجهة

**قابلية القسمة**
**تصحيح:** /
**الهدف:** تعيين شروط قابلية القسمة على2، 3، 4، 5، 9، 10 و 11.
**توجيهات:** يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.
**الحل:** بسيط.
**مفتاح حساب**
**تصحيح:** /
**الهدف:** توظيف الموافقات في وضعية لها دلالة.
**توجيهات:** يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.
**الحل:** بسيط
**حل معادلات من الشكل** $ax + by = c$
**تصحيح:** /
**الهدف:** توظيف الموافقات لحل المعادلات من الشكل $ax + by = c$.
**توجيهات:** يقدم النشاط ضمن أفواج أو كواجب منزلي.
**الحل:** بسيط

# التمارين

## التمارين التطبيقية

**1 - الموافقة في $\mathbb{Z}$**

**1** أ - $45-3=42=7\times6$ إذن $45\equiv3[7]$ .

ب - $152-2=150=3\times50$ إذن $152\equiv2[3]$.

جـ - $29-(-1)=30=6\times5$ إذن $29\equiv-1[6]$ .

د - $137-(-3)=140=5\times28$ ومنه $137\equiv-3[5]$ .

و - $-13-2=-15=5(-3)$ ومنه $-13\equiv2[5]$ .

هـ - $-17-(-7)=-10=10(-1)$ ومنه $-17\equiv-7[10]$

**2** $37\equiv x\ [4]$ معناه $37-x=4k$ مع $k\in\mathbb{Z}$ أي

$x=37-4k$ وبالتالي يمكن أخذ $x=37$ ، $x=37-4=33$ ، $x=37-4\times2=29$ ،

$x=37-4(-1)=42$ ، $x=37-4(-2)=45$

من أجل $k=9$ يكون $x=1$ وهو العدد الطبيعي الوحيد الأصغر تماما من 4.

**3** $n\equiv4[7]$ معناه $n=7k+4$ مع $k\in\mathbb{Z}$ .

$0\le n\le30$ معناه $0\le7k+4\le30$ أي $-\dfrac{4}{7}\le k\le\dfrac{26}{7}$

$k\in\mathbb{Z}$ إذن $k\in\{0,1,2,3\}$ ومنه $n\in\{4,11,18,25\}$.

**4** $n\equiv140[12]$ و $140\equiv8[12]$ إذن $n\equiv8[12]$

بما أن $0\le8<12$ فإن 8 هو باقي قسمة $n$ على 12.

**5** $x\equiv2[7]$ إذن:

$x+5\equiv7[7]$ ومنه $x+5\equiv0[7]$

$x-5\equiv-3[7]$ ومنه $x-5\equiv4[7]$

$9x\equiv18[7]$ ومنه $9x\equiv4[7]$

$-15x\equiv-30[7]$ ومنه $-15x\equiv5[7]$

$x\equiv2[7]$ ومنه $x^3\equiv8[7]$ أي $x^3\equiv1[7]$ .

**6** أ - $46\equiv0[n]$ معناه $46=kn$ مع $k\in\mathbb{N}^*$ إذن $n$ يقسم 46 و $n\ge2$ أي $n\in\{2,23,46\}$.

ب - $10\equiv1[n]$ معناه $9=kn$ مع $k\in\mathbb{N}^*$ إذن $n$ يقسم 9 و $n\ge2$ أي $n\in\{3,9\}$.

جـ - $27\equiv5[n]$ معناه $22=kn$ مع $k\in\mathbb{N}^*$ إذن $n$ يقسم 22 و $n\ge2$ أي $n\in\{2,11,22\}$.

**7** $a\equiv b\ [n]$ معناه $a-b=kn$ مع $k\in\mathbb{N}$ ويكافئ $am-bm=knm$ ومعناه $am\equiv bm\ [nm]$ .

**8** لدينا $A-a\equiv0[n]$ ، $B-b\equiv0[n]$ و $C-c\equiv0[n]$ وهذا معناه $A\equiv a[n]$ ، $B\equiv b[n]$ و $C\equiv c[n]$

إذن $ABC\equiv abc[n]$ أي $ABC-abc\equiv0[n]$.

**9** $n \equiv 0[m]$ معناه $n = km$ مع $k \in \mathbb{N}^*$ .
$a \equiv b[n]$ معناه $a-b = k'n$ مع $k' \in \mathbb{N}$ .
ومنه $a-b = k'km$ إذن $a \equiv b[m]$ .

**10** 1) $30757 \equiv 7[10]$ ومنه $a \equiv 7[10]$ ، $15163 \equiv 3[10]$ ومنه $b \equiv 3[10]$ ، $12924 \equiv 4[10]$ ومنه $c \equiv 4[10]$ .

2) أ - $a+b+c \equiv 7+3+4[10]$ ومنه $a+b+c \equiv 4[10]$ .
ب - $a-b+c \equiv 7-3+4[10]$ ومنه $a-b+c \equiv 8[10]$ .
جـ - $a+b-c \equiv 7+3-4[10]$ ومنه $a+b-c \equiv 6[10]$ .
د - $abc \equiv 7\times 3\times 4[10]$ ومنه $abc \equiv 4[10]$ .
هـ - $ab+ac+bc \equiv 7\times 3+7\times 4+4\times 3[10]$
$ab+ac+bc \equiv 1[10]$ .
و - $a^2+b^2+c^2 \equiv 49+9+16[10]$ ومنه $a^2+b^2+c^2 \equiv 4[10]$ .

**11** الساعة المطلوبة هي $n$ حيث $0 \le n < 24$
أ ــ $n \equiv 3+112[24]$ ومنه $n \equiv 115[24]$ أي $n \equiv 19[24]$ إذن الساعة كانت تشير إلى 19 أي السابعة مساء .
ب ــ $n \equiv 3-163[24]$ ومنه $n \equiv -160[24]$ أي $n \equiv 8[24]$ إذن الساعة كانت تشير إلى الثامنة صباحا .

**12** أ ــ $15123 \equiv 3[5]$ ومنه النقطة $M$ تصل إلى النقطة $D$ .
ب ــ $-15132 \equiv 3[5]$ ومنه النقطة $M$ تصل كذلك إلى النقطة $D$ .

**13** $12 \equiv 2[5]$ ومنه $12^4 \equiv 2^4[5]$ أي $12^4 \equiv 16[5]$
$16 \equiv 1[5]$ ومنه $12^4 \equiv 1[5]$ . $1527 = 4\times 381+3$
لدينا $12^{1527} = 12^{4\times 381+3} = \left(12^4\right)^{381} \times 12^3$ ومنه $12^{1527} \equiv 1^{381}\times 2^3[5]$ أي $12^{1527} \equiv 3[5]$ .

**14** $371 \equiv 1[5]$ ومنه $371^{238} \equiv 1[5]$ .
$579 \equiv -1[5]$ ومنه $579^{2008} \equiv 1[5]$ .
$1429 \equiv -1[5]$ ومنه $1429^{2009} \equiv -1[5]$ بما أن $-1 \equiv 4[5]$ فإن $1429^{2009} \equiv 4[5]$ .
$1954 \equiv -1[5]$ ومنه $1954^{1962} \equiv 1[5]$ .

**15** # $1754 \equiv -1[9]$ ومنه $1754^{12} \equiv 1[9]$ .
# $34572 \equiv 3[9]$ ومنه $34572^{457} \equiv 3^{457}[9]$ ولدينا
$3^{457} = 3\times 3^{456} = 3\times 9^{228}$ إذن $3^{457} \equiv 0[9]$ وبالتالي $34572^{457} \equiv 0[9]$ .
# $375 \equiv -3[9]$ ومنه $375^{2009} \equiv (-3)^{2009}[9]$ ولدينا $(-3)^{2009} = -3\times(-3)^{2\times 1004} = -3\times 9^{1004}$ ومنه
$(-3)^{2009} \equiv 0[9]$ إذن $375^{2009} \equiv 0[9]$ .

**16** أ - $4 \equiv -1[5]$ ومنه $4^{2003} \equiv -1^{2003}[5]$ إذن $4^{2003}+1^{2003} \equiv 0[5]$ .
$3 \equiv -2[5]$ ومنه $3^{2003} \equiv -2^{2003}[5]$
إذن $3^{2003}+2^{2003} \equiv 0[5]$ .

وبالتالي $1^{2003}+2^{2003}+3^{2003}+4^{2003}\equiv 0[5]$

**ب -** $6\equiv -1[7]$ ومنه $6^{2007}\equiv -1^{2007}[7]$ إذن $6^{2007}+1^{2007}\equiv 0[7]$ .

$5\equiv -2[7]$ ومنه $5^{2007}\equiv -2^{2007}[7]$ إذن $5^{2007}+2^{2007}\equiv 0[7]$ ؛ $4\equiv -3[7]$ ومنه $4^{2007}\equiv -3^{2007}[7]$ إذن $4^{2007}+3^{2007}\equiv 0[7]$ ؛ وبالتالي $1^{2007}+2^{2007}+3^{2007}+4^{2007}+5^{2007}+6^{2007}\equiv 0[7]$.

**جـ -** لدينا $1\equiv -8[9]$ ؛ $7\equiv -2[9]$ ؛ $3\equiv -6[9]$ ؛ $5\equiv -4[9]$ .

ومنه $1^{2008}\equiv 8^{2008}[9]$ ؛ $7^{2008}\equiv 2^{2008}[9]$ ؛ $3^{2008}\equiv 6^{2008}[9]$ ؛ $5^{2008}\equiv 4^{2008}[9]$ .

إذن $1^{2008}-8^{2008}\equiv[9]$ ؛ $7^{2008}-2^{2008}\equiv[9]$ ؛ $3^{2008}-6^{2008}\equiv[9]$ ؛ $5^{2008}-4^{2008}\equiv[9]$ .

وبالتالي : $1^{2008}-2^{2008}+3^{2008}-4^{2008}$

$+5^{2008}-6^{2008}+7^{2008}-8^{2008}\equiv 0[9]$

**17** من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $4^{2n+1}\equiv 0[4]$ ؛ $2^{2n+1}=2\times 4^n$ ومنه $2^{2n+1}\equiv 0[4]$ ؛ $3\equiv -1[4]$ ومنه $3^{2n+1}\equiv -1^{2n+1}[4]$ أي $1^{2n+1}+3^{2n+1}\equiv 0[4]$ ؛

وبالتالي $1^{2n+1}+2^{2n+1}+3^{2n+1}+4^{2n+1}\equiv 0[4]$ .

**18** مجموع أرقام العدد $7254$ هو $18$ وهو مضاعف لِـ $9$ إذن $7254\equiv 0[9]$ ومنه $7254^n\equiv 0[9]$ .

العدد $3532$ زوجي إذن $3532\equiv 0[2]$ ومنه $3532^n\equiv 0[2]$ .

$1785\equiv 0[5]$ ومنه $1785^n\equiv 0[5]$ .

$51502\equiv 0[11]$ ومنه $51502^n\equiv 0[11]$ .

**19** 1) $3286\equiv 6[10]$ ومنه $3286^{374}\equiv 6^{374}[10]$ ولدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ $6^n\equiv 6[10]$

إذن $6^{374}\equiv 6[10]$ وبالتالي $3286^{374}\equiv 6[10]$ .

2) $76\equiv 4[12]$ ولدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$، $4^n\equiv 4[12]$

إذن $4^{784}\equiv 4[12]$ وبالتالي $76^{784}\equiv 4[12]$ .

**20** 1) ليكن $n$ عددا طبيعيا , $3^{2n}=9^n$ و $9\equiv 2[7]$ إذن $9^n\equiv 2^n[7]$ ومنه $3^{2n}\equiv 2^n[7]$ .

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي , $3^{2n}-2^n\equiv 0[7]$ .

2) بواقي قسمة العدد $n$ على $3$ هي $0$ , $1$ و $2$ وبفرض $n$ ليس مضاعفا لِــ $3$ فيكون $n=3p+1$ أو $n=3p+2$ مع $p\in\mathbb{N}$ .

إذا كان $n=3p+1$, $2^{2n}+2^n+1=2^{6p+2}+2^{3p+1}+1$

$2^{2n}+2^n+1=4\times 8^{2p}+2\times 8^p+1$ . لدينا $8\equiv 1[7]$ ومنه من أجل كل $p\in\mathbb{N}$ , $8^p\equiv 1[7]$ و $8^{2p}\equiv 1[7]$ .

وبالتالي $2^{2n}+2^n+1\equiv 7[7]$ أي $2^{2n}+2^n+1\equiv 0[7]$

إذا كان $n=3p+2$, $2^{2n}+2^n+1=2^{6p+4}+2^{3p+2}+1$

$2^{2n}+2^n+1=2\times 8^{2p+1}+4\times 8^p+1$ . لدينا من أجل كل $p\in\mathbb{N}$ , $8^p\equiv 1[7]$ و $8^{2p+1}\equiv 1[7]$ .

وبالتالي $2^{2n}+2^n+1\equiv 7[7]$ أي $2^{2n}+2^n+1\equiv 0[7]$

**21** ليكن $n$ عددا طبيعيا .

1) $3^3=27$ ومنه $3^3\equiv 2[5]$ إذن $3^{3n}\equiv 2^n[5]$ ومنه $3^{3n+2}\equiv 9\times 2^n[5]$ إذن $3^{3n+2}\equiv 4\times 2^n[5]$

$2^{n+4}=16\times2^n$ ؛ $16\equiv1[5]$ إذن $2^{n+4}\equiv 2^n[5]$ .

$3^{3n+2}+2^{n+4}\equiv4\times2^n+2^n[5]$ أي $3^{3n+2}+2^{n+4}\equiv5\times2^n[5]$ ومنه $3^{3n+2}+2^{n+4}\equiv0[5]$ .

2) $3^{3n}\equiv2^n[5]$ ومنه $3\times3^{3n}\equiv3\times2^n[5]$

$2^{n+1}=2\times2^n$ إذن $3^{3n+1}+2^{n+1}\equiv3\times2^n+2\times2^n[5]$

أي $3^{3n+1}+2^{n+1}\equiv5\times2^n[5]$ ومنه $3^{3n+1}+2^{n+1}\equiv0[5]$

**22** $10\equiv1[9]$ و $9\equiv0[9]$ ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $10^n\equiv1[9]$ و $9n\equiv0[9]$

إذن $(9n-1)10^n+1\equiv-1\times1+1[9]$ أي $\alpha\equiv0[9]$ .

**23** ليكن $n$ عددا طبيعيا .

1) $2^6=64$ و $64\equiv13[17]$ إذن $2^6\equiv13[17]$ ومنه $2^{6n}\equiv13^n[17]$ وبالتالي $2^{6n+3}\equiv8\times13^n[17]$

$3^4=81$ و $81\equiv13[17]$ إذن $3^4\equiv13[17]$ ومنه $3^{4n}\equiv13^n[17]$ وبالتالي $3^{4n+2}\equiv9\times13^n[17]$ .

$2^{6n+3}+3^{4n+2}\equiv8\times13^n+9\times13^n[17]$ ومنه $2^{6n+3}+3^{4n+2}\equiv17\times13^n[17]$ إذن $2^{6n+3}+3^{4n+2}\equiv0[17]$ .

2) $2^{5n}=(2^5)^n=32^n$ و $32\equiv3[29]$ إذن $2^{5n}\equiv3^n[29]$ ومنه $2^{5n+1}\equiv2\times3^n[29]$ .

$3^{n+3}=27\times3^n$ إذن $2^{5n+1}+3^{n+3}\equiv2\times3^n+27\times3^n[29]$ ومنه $2^{5n+1}+3^{n+3}\equiv29\times3^n[29]$ إذن

$2^{5n+1}+3^{n+3}\equiv0[29]$ .

**25** 1) إذا كان $n$ فرديا فإن البواقي الممكنة لقسمته على 16 هي الأعداد الطبيعية الفردية الأصغر تماما من 16 .

إذا كان $n\equiv1[16]$ فإن $n^4\equiv1[16]$ .

إذا كان $n\equiv3[16]$ فإن $n^4\equiv3^4[16]$ ومنه $n^4\equiv1[16]$ .

إذا كان $n\equiv5[16]$ فإن $n^2\equiv(-9)^2[16]$ ومنه $n^2\equiv1[16]$ وبالتالي $n^4\equiv1[16]$ .

إذا كان $n\equiv7[16]$ فإن $n^2\equiv7^2[16]$ أي $n^2\equiv1[16]$ وبالتالي $n^4\equiv1[16]$ .

إذا كان $n\equiv9[16]$ فإن $n^2\equiv1[16]$ ومنه $n^4\equiv1[16]$ .

إذا كان $n\equiv11[16]$ فإن $n^2\equiv(-5)^2[16]$ ومنه $n^2\equiv9[16]$ وبالتالي $n^4\equiv9^2[16]$ إذن $n^2\equiv1[16]$ .

إذا كان $n\equiv13[16]$ فإن $n\equiv-3[16]$ ومنه $n^4\equiv(-3)^4[16]$ ومنه $n^4\equiv1[16]$

إذا كان $n\equiv15[16]$ فإن $n\equiv-1[16]$ ومنه $n^4\equiv1[16]$

2) بواقي قسمة $n$ على 5 هي 0 , 1 , 2 , 3 و 4

ليكن $r$ ينتمي إلى $\{1,2,3,4\}$ بوضع $n\equiv r[5]$ معناه أن $n$ ليس مضاعفا للعدد 5 وبالتالي يكون $n^4\equiv r^4[5]$

ولدينا $1^4\equiv1[5]$ ، $2^4\equiv1[5]$ , $3^4\equiv1[5]$ , $4^4\equiv1[5]$

إذن من أجل كل $r\in\{1,2,3,4\}$ $r^4\equiv1[5]$ وبالتالي $n^4\equiv1[5]$ .

**26** أ

| $x\equiv$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | [5] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x\equiv$ | 0 | 2 | 4 | 1 | 3 | [5] |

ب - $2x\equiv3[5]$ معناه $x\equiv4[5]$ .

**27**

| $n\equiv$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | [7] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n^3\equiv$ | 0 | 1 | 1 | 6 | 1 | 6 | 6 | [7] |
| $n^3+n-2\equiv$ | 5 | 5 | 1 | 0 | 3 | 2 | 5 | |

$n^3+n-2\equiv 0[7]$ معناه $n\equiv 3[7]$ .

**28** (1

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_n$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 7 | 5 | 1 |

2) لدينا $2^6\equiv 1[9]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي $p$ ، $2^{6p}\equiv 1[9]$ .

ومنه $2^{6p+k}\equiv r_k\,[9]$ مع $k\in\{1,2,3,4,5\}$

ومنه إذا كان $n=6p$ فإن $r_n=r_0=1$ .

إذا كان $n=6p+1$ فإن $r_n=r_1=2$ .

إذا كان $n=6p+2$ فإن $r_n=r_2=4$ .

إذا كان $n=6p+3$ فإن $r_n=r_3=8$ .

إذا كان $n=6p+4$ فإن $r_n=r_4=7$ .

إذا كان $n=6p+5$ فإن $r_n=r_5=5$ .

3) $65\equiv 2[9]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $65^n\equiv 2^n\,[9]$ ولدينا $2^n\equiv r_n\,[9]$ إذن $65^n\equiv r_n\,[9]$ .

$2011=6\times 335+1$ ومنه $r_{2011}=r_1=2$ إذن $65^{2011}\equiv 2[9]$

**29** أ - $4^5\equiv 1[11]$ .

ب - $37\equiv 4[11]$ ومنه $37^5\equiv 4^5\,[11]$ إذن $37^5\equiv 1[11]$ ومنه من أجل كل عدد $k\in\mathbb{N}$ ، $37^{5k}\equiv 1[11]$ ؛

$37^{5k+1}\equiv 4[11]$ ؛ $37^{5k+2}\equiv 5[11]$ ؛ $37^{5k+3}\equiv 9[11]$ و $37^{5k+4}\equiv 3[11]$ .

**30** $2x=3y$ ومنه $2x\equiv 0[3]$ أي $4x\equiv 0[3]$ وهذا معناه $x\equiv 0[3]$ أي $x=3k$ مع $k\in\mathbb{Z}$ .

وبالتعويض نجد $2(3k)=3y$ أي $y=2k$ ومنه $(x,y)=(3k,2k)$ مع $k\in\mathbb{Z}$ .

**31** $2x-5y=1$ معناه $2x=5y+1$ إذن $2x\equiv 1[5]$ وهذا معناه $6x\equiv 3[5]$ أي $x\equiv 3[5]$ إذن $x=5k+3$

مع $k\in\mathbb{Z}$ وبالتعويض نجد $10k+6=5y+1$ أي $5y=10k+5$ أي $y=2k+1$

ومنه $(x,y)=(5k+3,2k+1)$ مع $k\in\mathbb{Z}$ .

**32** أ - $\begin{cases}x\equiv 3[5]\\ x\equiv 1[6]\end{cases}$ معناه $\begin{cases}x=5\alpha+3\\ x=6\beta+1\end{cases}$ إذن $5\alpha-6\beta=-2$ ومنه $5\alpha=6\beta-2$ ومنه $5\alpha\equiv -2[6]$ وهذا يعني

$-\alpha\equiv -2[6]$ أي $\alpha\equiv 2[6]$ ويعني $\alpha=6k+2$ مع $k\in\mathbb{Z}$ وبالتعويض نجد $5(6k+2)=6\beta-2$

أي $6\beta=30k+12$ ومعناه $\beta=5k+2$ . إذن $x=5\alpha+3=30k+13$ مع $k\in\mathbb{Z}$ .

ب - $\begin{cases}2x\equiv 2[4]\\ 4x\equiv 1[3]\end{cases}$ معناه $\begin{cases}x\equiv 1[2]\\ x\equiv 1[3]\end{cases}$ معناه $\begin{cases}3x\equiv 3[6]\\ 2x\equiv 2[6]\end{cases}$ ومنه $x\equiv 1[6]$ .

## 2 - التعداد

**33** $a=12734$

$a=10^4+2\times 10^3+7\times 10^2+3\times 10+4$

$b=5723$ ؛ $b=5\times 10^3+7\times 10^2+2\times 10+3$

$c=503019$ ؛ $c=5\times 10^5+3+\times 10^3+10+9$ .

**34** $a=\overline{234}=2\times6^2+3\times6+4$ ؛ $b=\overline{1523}=6^4+5\times6^3+2\times6+3$ ؛
$c=\overline{503012}=5\times6^5+3\times6^3+6+2$ .

**35** $a=7^3+2\times7^2+3\times7+5=\overline{1235}$ . $b=5\times7^2+2\times7=\overline{520}$ ؛ $c=6\times7^3+2\times7+1=\overline{6021}$.

**36** $N_a=4a^5+2a^3+a+3=\overline{40213}$.

**37** أ ــ $x\geq7$ ومنه أصغر قيمة هي $x=7$ .

ب ــ $\overline{2306}=2\times7^3+3\times7^2+0\times7+6$ و $\overline{1035}=7^3+0\times7^2+3\times7+5$

**38** $2=1\times2+0=\overline{10}$ ، $4=1\times2^2+0\times2+0=\overline{100}$ ، $7=1\times2^2+1\times2+1=\overline{111}$ ،
$33=1\times2^5+1=\overline{10001}$.

**39** $n=2^6+2^5+2^3+2^2+1=109$ ؛ $n=2x^2+x+4$ .

إذن $2x^2+x+4=109$ معناه $2x^2+x-105=0$ ومعناه $x=7$ ، $x=-\frac{15}{2}$ . إذن الأساس 7 .

**40** $\overline{2003}=\overline{21}\times\overline{43}$ معناه $x\geq5$ و $(2x+1)(4x+3)=2x^3+3$ أي $x\geq5$ و $2x^3-8x^2-10x=0$
ومعناه $2x^2-8x-10=0$ أي $x=10$ .

**41** أ - $\overline{411}=\overline{15}\times\overline{23}$ معناه $(x+5)(2x+3)=4x^2+x+1$
أي $2x^2-12x-14=0$ ومعناه $x^2-6x-7=0$ أي $x=-1$ أو $x=7$ إذن الأساس هو $x=7$ .

ب - $\overline{21}\times\overline{14}=\overline{324}$ معناه $(2a+1)(a+4)=3a^2+2a+4$ ومعناه $a^2-7a=0$ إذن $a=7$ .

جـ - $2888=\overline{412}\times\overline{31}$ معناه $(4x^2+x+2)(3x+1)=2888$ ومعناه $12x^3+7x^2+7x=2886$

لدينا $x\geq5$ إذا كان $x=5$ فإن $12x^3+7x^2+7x\equiv0[5]$ بينما $2886\equiv1[5]$ إذن $x\neq5$.

ولدينا : $12\times6^3+7\times6^2+7\times6=2886$ إذن الأساس $x=6$ .

**42** أ - $x^2+6x+2=7x+7+6x+3$ مع $x>7$ معناه $x^2-7x-8=0$ ومعناه $x=8$ .

ب - $\overline{77}\times\overline{63}=(7\times8+7)(6\times8+3)=3213$

جـ - $3213=8\times401+5=8(8(8\times6+2)+1)+5$
$3213=6\times8^3+2\times8^2+8+5=\overline{6215}$.

**43** أ - $\overline{12}\times\overline{23}=\overline{276}$ . $(a+2)(2a+3)=2a^2+7a+6$ وهذا صحيح من أجل كل عدد طبيعي $a>7$ .

ب - $\overline{541}=\overline{22}\times\overline{32}$ معناه $(2x+2)(3x+2)=5x^2+4x+1$ ومعناه $x^2+6x+3=0$ أي $x=-3+\sqrt{6}$
أو $x=-3-\sqrt{6}$ إذن لا يوجد أي أساس يكتب فيه $\overline{541}=\overline{22}\times\overline{32}$

**44** $10=1\times2^3+0\times2^2+1\times2+0=\overline{1010}$ ؛ $100=64+32+4=2^6+2^5+2^2$ أي $100=\overline{1100101}$

**46** $72881=12(12(12\times(12\times3+6)+2)+1)+5$ ومنه $72881=3\times12^4+6\times12^3+2\times12^2+1\times12+5$

إذن $72881=\overline{36215}$ في الأساس 12

$7^5<72881<7^6$ ولدينا $72881=4\times7^5+2\times7^4+2\times7^3+3\times7^2+2\times7+4$ أي $72881=\overline{422324}$

**47** $\overline{3752}=3\times8^3+7\times8^2+5\times8+2=2026$ .

**48** $\overline{6175}=6\times9^3+1\times9^2+7\times9+5$ ، $\overline{6175}=4523$ لدينا : $12^3<4523<12^4$ ومنه
$4523=2\times12^3+7\times12^2+4\times12+11$ إذن $4523=\overline{274\alpha}$ حيث $\alpha=11$ .

**49** $\overline{234}=2\times5^2+3\times5+4$ أي $\overline{234}=2\times(7-2)^2+3\times(7-2)+4$ ؛ $\overline{234}=2\times7^2+3\times7-50$

$\overline{234}=1\times7^2+2\times7+6=\overline{126}$

$\overline{1040}=5^3+4\times5=(7-2)^3+20$ ؛ $\overline{1040}=7^3-6\times7^2+12\times7+12$ ؛ $\overline{1040}=2\times7^2+6\times7+5=\overline{265}$

**50** $a=1\times a+0=\overline{10}$ ، $a^2=1\times a^2+0\times a+0=\overline{100}$ و $a^3=1\times a^3+0\times a^2+0\times a+0=\overline{1000}$ .

**51** نفرض أن $A$ يكتب في النظام ذي الأساس العشري كما يلي $A=\overline{a_na_{n-1}...a_0}$ حيث $0\le a_i\le 9$ .

ومنه $A=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+...+a_0$ ولدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ $10^n\equiv1[3]$ وبالتالي

$A\equiv a_n+a_{n-1}+...+a_0[3]$ أي $A\equiv S[3]$ إذن $A\equiv0[3]$ معناه $S\equiv0[3]$ .

**52** نضع $x=\overline{a_na_{n-1}...a_0}$ ؛ $y=\overline{a_0a_1...a_n}$ ؛ $x\equiv a_n+a_{n-1}+...+a_0[9]$ و $y\equiv a_0+a_1+...+a_n[9]$

ومنه $x-y\equiv0[9]$ .

**53** (1

| + | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 10 |
| 2 | 2 | 3 | 10 | 11 |
| 3 | 3 | 10 | 11 | 12 |

$4=1\times4+0=\overline{10}$ ، $3+3=1\times4+2=\overline{12}$ .

(2
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 111}\\ 3223\\ +\quad 132\\ \hline =10021\end{array}$$
إذن $3223+132=10021$ .

**54** (1

| × | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 0 | 2 | 10 | 12 |
| 3 | 0 | 3 | 12 | 21 |

$3\times3=2\times4+1=\overline{21}$ ، $3+3=1\times4+2=\overline{12}$ .

(2
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 222}\\ 3223\\ \times\quad 123\\ \hline 23001\\ 13112.\\ 3223..\\ \hline 1203021\end{array}$$
إذن $3223\times123=1203021$

**55**
$$\begin{array}{r} 3421\\ +\ \ 230\\ \hline 4201\end{array} \quad ، \quad \begin{array}{r} 431\\ -132\\ \hline 244\end{array} \quad ، \quad \begin{array}{r} 213\\ \times\ \ 14\\ \hline 1412\\ 213.\\ \hline 4042\end{array} \ .$$

**56** $\begin{array}{r} 39\beta7 \\ +\ \ 213 \\ \hline 400\alpha \end{array}$ ، $\begin{array}{r} 400\alpha \\ -39\beta7 \\ \hline 213 \end{array}$ ، $\begin{array}{r} 27 \\ \times\ \ 41 \\ \hline 27 \\ 104. \\ \hline 1067 \end{array}$ .

## تمارين للتعمق

### 1 - الموافقات في $\mathbb{Z}$

**57** أ - $2^0 \equiv 1[10]$ ، $2 \equiv 2[10]$ ، $2^2 \equiv 4[10]$ ، $2^3 \equiv 8[10]$ ، $2^4 \equiv 6[10]$ ، $2^5 \equiv 2[10]$ .

لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $6^n \equiv 6[10]$ (بالتراجع)

$2^4 \equiv 6[10]$ إذن من أجل كل $p \in \mathbb{N}$ ، $2^{4p} \equiv 6^p\,[10]$

إذن $2^{4p+4} \equiv 6^4\,[10]$ ومنه $2^{4p+4} \equiv 6[10]$ وعليه $2^{4p+1} \equiv 2[10]$ ؛ $2^{4p+2} \equiv 4[10]$ ؛ $2^{4p+3} \equiv 8[10]$

ب - كل عدد طبيعي يوافق رقم آحاده بترديد $10$ .

إذا كان $n = 0$ فإن $2^0 = 1$ وهو رقم آحاده

إذا كان $n = 4k$ مع $k \in \mathbb{N}^*$ فإن رقم آحاد $2^n$ هو $6$ .

إذا كان $n = 4k+1$ مع $k \in \mathbb{N}$ فإن رقم آحاد $2^n$ هو $2$ .

إذا كان $n = 4k+2$ مع $k \in \mathbb{N}$ فإن رقم آحاد $2^n$ هو $4$ .

إذا كان $n = 4k+3$ مع $k \in \mathbb{N}$ فإن رقم آحاد $2^n$ هو $8$ .

جـ - $3548^9 \times 2534^{31} \equiv 8^9 \times 4^{31}\,[10]$

أي $3548^9 \times 2534^{31} \equiv 2^{27} \times 2^{62}\,[10]$ .

$3548^9 \times 2534^{31} \equiv 2^{89}\,[10]$ ولدينا $89 = 4\times 22+1$ ؛

إذن $2^{89} \equiv 2[10]$ ومنه $3548^9 \times 2534^{31} \equiv 2[10]$

إذن رقم آحاد $3548^9 \times 2534^{31}$ هو $2$ .

**58** $51^2 = 2601$ ومنه $51^2 = 1[100]$ إذن $\left(51^2\right)^{1004} = 1[100]$ أي $51^{2008} \equiv 1[100]$

إذن الرقم الأخير هو $1$ وما قبله $0$ .

**59** لكل عدد صحيح $a$ لدينا إما $a \equiv -1[3]$ وإما $a \equiv 0[3]$ وإما $a \equiv 1[3]$ .

إذا كان $x \equiv 0[3]$ أو $y \equiv 0[3]$ فإن $xy\left(x^2 - y^2\right) \equiv 0[3]$

إذا كان $\begin{cases} x \equiv 1[3] \\ y \equiv 1[3] \end{cases}$ أو $\begin{cases} x \equiv -1[3] \\ y \equiv -1[3] \end{cases}$ أو $\begin{cases} x \equiv 1[3] \\ y \equiv -1[3] \end{cases}$ أو $\begin{cases} x \equiv -1[3] \\ y \equiv 1[3] \end{cases}$ فإن $\begin{cases} x^2 \equiv 1[3] \\ y^2 \equiv 1[3] \end{cases}$ ومنه $x^2 - y^2 \equiv 0[3]$

إذن $xy\left(x^2 - y^2\right) \equiv 0[3]$ .

**60** $n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 8 = (n+1)^3 - 8$

$n^3 + 3n^2 + 3n - 7 \equiv 0[8]$ معناه $(n+1)^3 \equiv 0[8]$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n \equiv$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | [8] |
| $n+1 \equiv$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 0 | [8] |
| $(n+1)^3 \equiv$ | 1 | 0 | 3 | 0 | 5 | 0 | 7 | 0 | [8] |

إذن $n^3+3n^2+3n-7\equiv 0[8]$ معناه $n\equiv 1[8]$ أو $n\equiv 3[8]$ أو $n\equiv 5[8]$ أو $n\equiv 7[8]$ .

**61** أ ـ $2^6\equiv 1[9]$ ومنه من أجل كل $p\in\mathbb{N}$ ، $2^{6p}\equiv 1[9]$ أي $2^{6p}-1\equiv 0[9]$ معناه $n=6p$ .

ب ـ إذا كان $n=6p$ فإن $A=2^n-1=\left(2^3\right)^{2p}-1$ أي $A=8^{2p}-1$ ولدينا

**65** نضع $N=\left(n^2-1\right)\left(n^2-4\right)$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n\equiv$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $[5]$ |
| $n^2\equiv$ | 0 | 1 | 4 | 4 | 1 | $[5]$ |
| $n^2-1\equiv$ | 4 | 0 | 3 | 3 | 0 | $[5]$ |
| $n^2-4\equiv$ | 1 | 2 | 0 | 0 | 2 | $[5]$ |
| $N\equiv$ | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | $[5]$ |

ومنه إذا كان $n\not\equiv 0[5]$ فإن $N\equiv 0[5]$

**66** $N=n(2n+1)(7n+1)$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n\equiv$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $[6]$ |
| $2n+1\equiv$ | 1 | 3 | 5 | 1 | 3 | 5 | $[6]$ |
| $7n+1\equiv$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 | $[6]$ |
| $N\equiv$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $[6]$ |

**67** أ - $A=n^2-n+1$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n\equiv$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $[7]$ |
| $n^2\equiv$ | 0 | 1 | 4 | 2 | 2 | 3 | 1 | $[7]$ |
| $A$ | 1 | 1 | 3 | 0 | 6 | 6 | 3 | $[7]$ |

ب - $A\equiv 0[7]$ معناه $n\equiv 3[7]$ .

جـ - نضع $B=2753^2-2753+1$ ؛ نعتبر $n=2753$ ومنه $n\equiv 2[7]$ إذن $A\equiv 3[7]$ وبالتالي $B\equiv 3[7]$ .

**68** $A=2n^3-n^2+2$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n\equiv$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $[7]$ |
| $n^2\equiv$ | **0** | **1** | **4** | **2** | **2** | **4** | **1** | $[7]$ |
| $n^3\equiv$ | 0 | 1 | 1 | 6 | 1 | 6 | 6 | $[7]$ |
| $2n^3\equiv$ | **0** | **2** | **2** | **5** | **2** | **5** | **5** | $[7]$ |
| $A$ | 2 | 3 | 0 | 5 | 2 | 3 | 6 | $[7]$ |

$2n^3-n^2+2\equiv 0[7]$ معناه $n\equiv 2[7]$

**69** أ - $4^3\equiv 1[7]$ ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $4^{3n}\equiv 1[7]$ وعليه $4^{3n+1}\equiv 4[7]$ ؛ $4^{3n+2}\equiv 2[7]$ .

ب - نضع $N=851^{3n}+851^{2n}+851^{n}+2$

$851\equiv 4[7]$ ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $851^{3n}\equiv 4^{3n}[7]$ أي $851^{3n}\equiv 1[7]$ ويصبح لدينا :

$N\equiv 4^{2n}+4^n+3[7]$ أي $N\equiv 4^n\left(4^n+1\right)+3[7]$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $n\equiv$ | 0 | 1 | 2 | $[3]$ |
| $4^n\equiv$ | 1 | 4 | 2 | $[7]$ |
| $4^n+1\equiv$ | 2 | 5 | 3 | $[7]$ |
| $N\equiv$ | 5 | 2 | 1 | $[7]$ |

**70** أ - $7^3\equiv 1[9]$ ومنه من أجل كل $k\in\mathbb{N}$ ، $7^{3k}\equiv 1[9]$ وعليه $7^{3k+1}\equiv 7[9]$ ؛ $7^{3k+2}\equiv 4[9]$ .

ب - نضع $7^n+3n-1=A$

إذا كان $n=3k$ فإن $A=7^{3k}+9k-1$ ومنه $A\equiv 1+0-1[9]$ أي $A\equiv 0[9]$ .

إذا كان $n=3k+1$ فإن $A=7^{3k+1}+9k+2$ ومنه $A\equiv 7+0+2[9]$ أي $A\equiv 0[9]$ .

إذا كان $n=3k+2$ فإن $A=7^{3k+2}+9k+5$ ومنه $A\equiv 4+0+5[9]$ أي $A\equiv 0[9]$ .

**71**

| $x\equiv$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | [8] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x\equiv$ | 0 | 3 | 6 | 1 | 4 | 7 | 2 | 5 | [8] |

$3x\equiv 7[8]$ معناه $x\equiv 5[8]$ .

**72** $8x^2\equiv 16[3]$ معناه $2x^2\equiv 1[3]$ .

البواقي الممكنة لكل عدد صحيح $x$ على 3 هي 0 ، 1 ، 2 ومنه $x^2\equiv 0[3]$ أو $x^2\equiv 1[3]$ وبالتالي $2x^2\equiv 0[3]$ أو $2x^2\equiv 2[3]$

إذن من أجل كل عدد صحيح $x$ يكون إما $2x^2\equiv 0[3]$ وإما $2x^2\equiv 2[3]$ وبالتالي لا يوجد أي عدد صحيح $x$ يحقق $2x^2\equiv 1[3]$.

**73** أ - $2^3\equiv 1[7]$ ومنه من أجل كل $k\in\mathbb{N}$ ، $2^{3k}\equiv 1[7]$ وبالتالي $2^{3k+1}\equiv 2[7]$ ، $2^{3k+2}\equiv 4[7]$

$3^6\equiv 1[7]$ ومنه من أجل كل $k\in\mathbb{N}$ ، $3^{6k}\equiv 1[7]$ وبالتالي $3^{6k+1}\equiv 3[7]$ ، $3^{6k+2}\equiv 2[7]$ ، $3^{6k+3}\equiv 6[7]$ ، $3^{6k+4}\equiv 4[7]$ و $3^{6k+5}\equiv 5[7]$ .

ب -

| $n\equiv$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | [6] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^n\equiv$ | 1 | 2 | 4 | 1 | 2 | 4 | [7] |
| $3^n\equiv$ | 1 | 3 | 2 | 6 | 4 | 5 | [7] |
| $2^n+3^n\equiv$ | 2 | 5 | 6 | 0 | 6 | 2 | [7] |

$2^x+3^x\equiv 0[7]$ معناه $x\equiv 3[6]$ .

**74** $3^5\equiv 1[11]$ ، $5^5\equiv 1[11]$ .

$5^x-3^x+6\equiv 0[11]$ معناه $5^x-3^x\equiv 5[11]$

| $x\equiv$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | [5] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $5^x\equiv$ | 1 | 5 | 3 | 4 | 9 | [11] |
| $3^x\equiv$ | 1 | 3 | 9 | 5 | 4 | [11] |
| $5^x-3^x\equiv$ | 0 | 2 | 5 | 10 | 5 | [11] |

$5^x-3^x\equiv 5[11]$ معناه $x\equiv 2[5]$ أو $x\equiv 4[5]$ .

**75** أ -

| $x\equiv$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | [5] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2\equiv$ | 0 | 1 | 4 | 4 | 1 | [5] |

ب - $x^2-5y^2=3$ معناه $x^2=5y^2+3$ إذن لكي تكون الثنائية $(x,y)$ حلا للمعادلة $x^2=5y^2+3$ يجب أن يكون $x^2\equiv 3[5]$ وهذا غير ممكن .

**76** أ -

| $y\equiv$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | [7] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y^3\equiv$ | 0 | 1 | 1 | 6 | 1 | 1 | 6 | [7] |
| $2y^3\equiv$ | 0 | 2 | 2 | 5 | 2 | 2 | 5 | [7] |

ب - $7x^2+2y^3=3$ معناه $2y^3=-7x^2+3$ ، إذا كانت الثنائية $(x,y)$ حلا للمعادلة $2y^3=-7x^2+3$ فإن $2y^3\equiv3[7]$ وهذا غير ممكن إذن المعادلة $7x^2+2y^3=3$ لا تقبل حلا .

**77** 1) إذا كان $x$ زوجيا فإن $3^x\equiv1[8]$ وإذا كان $x$ فرديا فإن $3^x\equiv3[8]$ .

2)

| $y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | [8] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y^2$ | 1 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 1 | [8] |

3) إذا كان $x$ فرديا فإن $3^x\equiv3[8]$ ومنه $y^2+8\equiv3[8]$ إذن $y^2\equiv3[8]$ وهذا غير ممكن .

4) $x=2n$ ؛ $3^{2n}-y^2=(3^n-y)(3^n+y)$ ، إذن $(3^n-y)(3^n+y)=8$ ومنه $(3^n+y)$ قاسم للعدد 8 .

إذن $3^n+y\leq8$ بما أن $y$ عدد طبيعي فإن $3^n\leq8$ .

5) $3^n\leq8$ إذن $n=0$ أو $n=1$ ولدينا $y^2=3^{2n}-8$ إذن $y^2=1-8=-7$ أو $y^2=9-8=1$ وبالتالي $y=1$ ولدينا $x=2n=2$ وبالتالي الثنائية الوحيدة التي تحقق المعادلة هي $(2,1)$.

**78** 1) بواقي قسمة كل عدد طبيعي $p$ على 3 هي 0 ، 1 و 2 وإذا كان $p$ أوليا فإن $p\equiv1[3]$ أو $p\equiv2[3]$ إذن $p\equiv1[3]$ أو $p\equiv-1[3]$ .

2) $p$ عدد طبيعي أولي إذن لا يقبل القسمة على 2 إذن هو فردي ومنه يوجد عدد طبيعي $k$ حيث يكون $p=2k+1$ أي $p^2=4k^2+4k+1$ ويكافئ $p^2-1=4k(k+1)$

$n=p^4-1=(p^2-1)(p^2+1)$

$p^2+1=4k^2+4k+2=2(2k^2+2k+1)$ إذن $p^2+1=2\alpha$ مع $\alpha\in\mathbb{N}$ .

$k(k+1)$ هو عدد زوجي إذن $k(k+1)=2\beta$ مع $\beta\in\mathbb{N}$ ومنه $p^2-1=8\beta$ .

وبالتالي $n=(p^2-1)(p^2+1)=16\alpha\beta$ .

3)

| $p$ | 1 | 2 | 3 | 4 | [5] |
|---|---|---|---|---|---|
| $p^4$ | 1 | 1 | 1 | 1 | [5] |
| $p^4-1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | [5] |

**79** 1) أ - $999\equiv0[111]$ ومنه $1000\equiv1[111]$ إذن من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $1000n\equiv n[111]$ .

**ب -** $111\,111=111\,000+111$ بوضع $n=111$ نحصل على $n\equiv0[111]$ و $1000n\equiv n[111]$ ومنه $1000n\equiv0[111]$ إذن $1000n+n\equiv0[111]$ .

$100\ 010\ 001=1000\ 10000+1$ ؛ $100\ 010\ 001=1000\ 00000+10000+1$

$100\ 010\ 001=1000(1000\times100+10)+1$

$1000\times100+10\equiv100+10[111]$ ومنه $1000(1000\times100+10)\equiv110[111]$ إذن

$1000(1000\times100+10)+1\equiv111[111]$ ؛ $1000(1000\times100+10)+1\equiv0[111]$ ؛ $100\ 010\ 001\equiv0[111]$ .

$\alpha=100\ 010\ 000\ 001$ .

$\alpha=100\ 010\ 000\ 000+1$ ؛ $\alpha=1000^2(100\ 0\times100+10)+1$ إذن $\alpha\equiv100+10+1[111]$ أي $\alpha\equiv0[111]$ .

2) $99999\equiv0[11\,111]$ ومنه $100000\equiv1[11\,111]$ . نضع $n=100000$

$\beta=1\ 001\ 001\ 001\ 001$ ؛ $\beta=1\ 001\ 001\ 000\ 000+1000+1$ ؛ $\beta=(1\ 001\ 000\ 0+10)n+1000+1$ ؛

$\beta=(1\ 000\ 000\ 0+1\ 000\ 0+10)n+1000+1$

$\beta=(1\,00n+1\,000\,0+10)n+1000+1$

$\beta\equiv10110+1001[11\,111]$ ؛ $\beta\equiv11111[11\,111]$ ، $\beta\equiv0[11\,111]$ .

**80** 1) $a=8k+2$ ؛ $a=104k'+r$ ومنه $104k'+r=8k+2$ أي $r=8(k-13k')+2$ إذن $r\equiv2[8]$

ب - $r=8\alpha+2$ مع $\alpha\in\mathbb{N}$ و $8\alpha+2<104$ أي $\alpha<\dfrac{102}{8}$ ؛ $\alpha<12$ .

2) $a=13k+3$ ؛ $a=104k'+r$ ومنه $104k'+r=13k+3$ أي $r=13(k-8k')+3$ إذن $r\equiv3[13]$ .

ب ــ $r=13\beta+3$ مع $\beta\in\mathbb{N}$ و $13\beta+3<104$ أي $\beta<\dfrac{101}{13}$ ؛ $\beta<7$ .

3) من 1) نلاحظ أن $r$ عدد زوجي إذن من 2) يجب أن يكون $\beta$ فرديا إذن $r\in\{16,42,68,94\}$

ولكن يجب أن يكون $\dfrac{r-2}{8}\in\mathbb{N}$ والقيمة الوحيدة التي تحقق هي $r=42$ .

**81** 1) $5\equiv5[11]$ ، $5^2\equiv3[11]$ ، $5^3\equiv4[11]$ ، $5^4\equiv9[11]$ ، $5^5\equiv1[11]$ .

2) $5^5\equiv1[11]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي $p$ ، $5^{5p}\equiv1[11]$ .

وإذا كان $k\in\{1,2,3,4\}$ فإن $5^k\times5^{5p}\equiv5^k[11]$ أي $5^{5p+k}\equiv5^k[11]$ .

ومنه $5^{5p+1}\equiv5[11]$ ، $5^{5p+2}\equiv5^2[11]$ ، $5^{5p+3}\equiv5^3[11]$ ، $5^{5p+4}\equiv5^4[11]$ .

إذن $5^{5p+1}\equiv5[11]$ ، $5^{5p+2}\equiv3[11]$ ، $5^{5p+3}\equiv4[11]$ ، $5^{5p+4}\equiv9[11]$ .

3) $1428=5\times245+3$ ، $2008=5\times401+3$ ومنه $5^{2008}-5^{1428}\equiv(4-4)[11]$ أي $5^{2008}-5^{1428}\equiv0[11]$ .

**82** 1) $3\equiv3[7]$ ، $3^2\equiv2[7]$ ، $3^3\equiv6[7]$ ، $3^4\equiv4[7]$ ، $3^5\equiv5[7]$ و $3^6\equiv1[7]$ .

2) $3^6\equiv1[7]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي $p$ ، $3^{6P}\equiv1[7]$

وإذا كان $k\in\{1,2,3,4,5\}$ فإن $3^k\times3^{6P}\equiv3^k[7]$ أي $3^{6P+k}\equiv3^k[7]$ .

ومنه $3^{6P+1}\equiv3[7]$ ، $3^{6P+2}\equiv2[7]$ ، $3^{6P+3}\equiv6[7]$ ، $3^{6P+4}\equiv4[7]$ ، $3^{6P+5}\equiv5[7]$ .

3) $1988=6\times331+2$ ومنه $3^{1988}\equiv2[7]$ .

$10\equiv3[7]$ ومنه $10^{1408}\equiv3^{1408}[7]$ ولدينا $1408=6\times234+4$ إذن $3^{1408}\equiv4[7]$ وبالتالي $10^{1408}\equiv4[7]$ .

$9\equiv2[7]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $9^{3n+2}\equiv2^{3n+2}[7]$ .

ولدينا $2^{3n+2}=4\times2^{3n}=4\times8^n$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $4\times8^n\equiv4\times1[7]$ إذن $9^{3n+2}\equiv4[7]$

الاستنتاج $3^{1988}+10^{1408}+9^{3n+2}\equiv(2+4+4)[7]$ ومنه $3^{1988}+10^{1408}+9^{3n+2}\equiv10[7]$ إذن

$3^{1988}+10^{1408}+9^{3n+2}\equiv3[7]$ .

إذن باقي القسمة الأقليدية للعدد $\left(3^{1988}+10^{1408}+9^{3n+2}\right)$ على 7 هو 3 .

**83** 1) $2\equiv2[5]$ ، $2^2\equiv4[5]$ ، $2^3\equiv3[5]$ ، $2^4\equiv1[5]$ .

الاستنتاجات : $2^4\equiv1[5]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي $p$ ، $2^{4p}\equiv1[5]$

إذن $2^{4p+1}\equiv2[5]$ ، $2^{4p+2}\equiv4[5]$ ، $2^{4p+3}\equiv3[5]$ .

$3\equiv-2[5]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي $p$ ، $3^{4p}\equiv2^{4p}[5]$ أي $3^{4p}\equiv1[5]$

وبالتالي $3^{4p+1}\equiv3[5]$ ، $3^{4p+2}\equiv9[5]$ ومنه $3^{4p+2}\equiv4[5]$ ، $3^{4p+3}\equiv27[5]$ ومنه $3^{4p+3}\equiv2[5]$ .

| $n=$ | $4p$ | $4p+1$ | $4p+2$ | $4p+3$ | $p\in\mathbb{N}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2^n\equiv$ | 1 | 2 | 4 | 3 | $[5]$ |
| $3^n\equiv$ | 1 | 3 | 4 | 2 | $[5]$ |

2) $14=4\times3+2$ إذن $2^{14}\equiv4[5]$.

$10=4\times2+2$ إذن $3^{10}\equiv4[5]$ .

3) $2\times3^{4n+1}-2^{4n}\equiv2\times3-1[5]$ ومنه $2\times3^{4n+1}-2^{4n}\equiv5[5]$

بما أن $5\equiv0[5]$ فإن $2\times3^{4n+1}-2^{4n}\equiv0[5]$ .

**84** 1) $5\equiv-2[7]$ ومنه $5^3\equiv-8[7]$ أي $5^3\equiv-1[7]$ إذن $5^6\equiv1[7]$

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي $k$, $5^{6k}\equiv1[7]$

ويكون لدينا : $5^{6k+1}\equiv5[7]$

$5^{6k+2}\equiv25[7]$ أي $5^{6k+2}\equiv4[7]$

$5^{6k+3}\equiv20[7]$ أي $5^{6k+3}\equiv6[7]$

$5^{6k+4}\equiv30[7]$ أي $5^{6k+4}\equiv2[7]$

$5^{6k+5}\equiv10[7]$ أي $5^{6k+5}\equiv3[7]$ .

2) $6\equiv-1[7]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ , $6^{2n}\equiv(-1)^2[7]$ أي $6^{2n}\equiv1[7]$ .

3) $5^n+6^{2n}+3\equiv(5^n+4)[7]$

$5^n+6^{2n}+3\equiv0[7]$ معناه $5^n+4\equiv0[7]$ ومعناه $5^n\equiv-4[7]$ ومعناه $5^n\equiv3[7]$ ومعناه $n=5k+6$ مع $k\in\mathbb{N}$ .

**85** 1) لدينا $2^4=16$ ومنه $2^4\equiv1[5]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي $p$ , $2^{4p}\equiv1[5]$

$2^{4p+1}\equiv2[5]$ , $2^{4p+2}\equiv4[5]$ ,

$2^{4p+3}\equiv8[5]$ أي $2^{4p+3}\equiv3[5]$.

2) لدينا $2^3=8$ ومنه $2^3\equiv1[7]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي $k$ , $2^{3k}\equiv1[7]$

$2^{3k+1}\equiv2[7]$ , $2^{3k+2}\equiv4[7]$ .

3) لدينا $\begin{cases}2^{4p+2}\equiv4[5]\\2^{3k+2}\equiv4[7]\end{cases}$ معناه $\begin{cases}n=4p+2\\n=3k+2\end{cases}$ ومعناه $\begin{cases}n\equiv2[4]\\n\equiv2[3]\end{cases}$ومعناه $\begin{cases}3n\equiv6[12]\\4n\equiv8[12]\end{cases}$ ومنه $n\equiv2[12]$

وعكسيا لدينا إذا كان $n\equiv2[12]$ فإن $n=12m+2$ ومنه $n=3(4m)+2$ و $n=4(3m)+2$ ومنه $\begin{cases}2^n\equiv4[5]\\2^n\equiv4[7]\end{cases}$ .

**86** $(n-1)$ مضاعف للعدد 3 معناه $n=3k+1$ مع $k\in\mathbb{N}$ .

$\left[1+(n-1)2^n\right]$ يقبل القسمة على 7 معناه $1+(n-1)2^n\equiv0[7]$ ومنه $1+(3k)2^{3k+1}\equiv0[7]$

يكافئ $1+3k\left(2^3\right)^k\times2\equiv0[7]$ومعناه $1+6k\equiv0[7]$ أي $-k\equiv-1[7]$ يكافئ $k\equiv1[7]$

إذن $n=3k+1=3(7p+1)+1$ أي $n=21p+4$ .

وعكسيا إذا كان $n=21p+4$ فإن $n-1=21p+3$ ومنه $(n-1)$ مضاعف للعدد 3 و $n-1\equiv 3[7]$
وكذلك $2^n=2^{21p+4}=2\left(2^3\right)^{7p+1}$ وبما أن $2^3\equiv 1[7]$ فإن $2^n\equiv 2[7]$ . ومنه $1+(n-1)2^n\equiv(1+3\times 2)[7]$ أي $1+(n-1)2^n\equiv 0[7]$ .

**88** 1) $4\equiv 4[11]$ , $4^2\equiv 5[11]$ , $4^3\equiv 9[11]$ , $4^4\equiv 3[11]$ , $4^5\equiv 1[11]$ .
ومنه من أجل كل عدد طبيعي $p$ , $4^{5p}\equiv 1[11]$ وعليه $4^{5p+1}\equiv 4[11]$ , $4^{5p+2}\equiv 5[11]$ , $4^{5p+3}\equiv 9[11]$ , $4^{5p+4}\equiv 3[11]$ .
2) $1995\equiv 4[11]$ ومنه $1995^n\equiv 4^n[11]$ .
$26\equiv 4[11]$ ومنه $26^{10n+2}\equiv 4^{10n+2}[11]$ ولدينا $4^{10n+2}=4^{5(2n)+2}=4^{5p+2}$ ومنه $4^{10n+2}\equiv 5[11]$ إذن $26^{10n+2}\equiv 5[11]$
إذن $6\times 1995^n+26^{10n+2}+7\equiv\left(6\times 4^n+5+7\right)[11]$ أي $6\times 1995^n+26^{10n+2}+7\equiv\left(6\times 4^n+1\right)[11]$
وبالتالي $6\times 1995^n+26^{10n+2}+7\equiv 0[11]$ معناه $6\times 4^n+1\equiv 0[11]$ ويكافئ $2\left(6\times 4^n+1\right)\equiv 0[11]$ أي $4^n+2\equiv 0[11]$ ومعناه $4^n\equiv 9[11]$
ومعناه $n=5p+3$ مع $p\in\mathbb{N}$ .

**89** 1) $5\equiv -2[7]$ ومنه $5^3\equiv -1[7]$ إذن $5^6\equiv 1[7]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي $p$ , $5^{6p}\equiv 1[7]$ وعليه :
$5^{6p+1}\equiv 5[7]$ , $5^{6p+2}\equiv 4[7]$ , $5^{6p+3}\equiv 6[7]$ , $5^{6p+4}\equiv 2[7]$ , $5^{6p+5}\equiv 3[7]$ .
2) لدينا $26\equiv 5[7]$ و $47\equiv 5[7]$
إذن من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ , $26^{6n+5}\equiv 5^{6n+5}[7]$ و $47^{12n+2}\equiv 5^{6(2n)+2}[7]$ وعليه $26^{6n+5}\equiv 3[7]$ و $47^{12n+2}\equiv 4[7]$ .
$26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}+3\equiv(3+2\times 4+3)[7]$ أي $26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}+3\equiv 14[7]$ ويكافئ $26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}+3\equiv 0[7]$ .
3) $26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}+5n\equiv 0[7]$ معناه $4+5n\equiv 0[7]$ ويكافئ $3(4+5n)\equiv 0[7]$ ومعناه $12+n\equiv 0[7]$ أي $n\equiv 2[7]$ .

**90** 1) $3^3=27$ ومنه $3^3\equiv 1[13]$ إذن من أجل كل عدد طبيعي $p$ , $3^{3p}\equiv 1[13]$ وعليه $3^{3p+1}\equiv 3[13]$ , $3^{3p+2}\equiv 9[13]$ .
2) $4\left(3^{n+1}-1\right)\equiv 0[13]$ يكافئ $40\left(3^{n+1}-1\right)\equiv 0[13]$ ويكافئ $3^{n+1}-1\equiv 0[13]$ معناه $3^{n+1}\equiv 1[13]$ ومعناه $n+1\equiv 0[3]$
أي $n\equiv 2[3]$ .

**91** $16\equiv 2[7]$ إذن $16^3\equiv 2^3[7]$ أي $16^3\equiv 1[7]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي $p$ , $16^{3p}\equiv 1[7]$ .
إذا كان $n=3p$ فإن $15\left(16^{n+1}-1\right)=15\left(16\times 16^{3p}-1\right)$ ومنه $15\left(16^{n+1}-1\right)\equiv 1(2\times 1-1)[7]$ أي $15\left(16^{n+1}-1\right)\equiv 1[7]$

إذا كان $n=3p+1$ فإن $15\left(16^{n+1}-1\right)=15\left(16^2\times16^{3p}-1\right)$ ومنه $15\left(16^{n+1}-1\right)\equiv1(4\times1-1)[7]$
أي $15\left(16^{n+1}-1\right)\equiv3[7]$ .
إذا كان $n=3p+2$ فإن $15\left(16^{n+1}-1\right)=15\left(16^3\times16^{3p}-1\right)$ ومنه $15\left(16^{n+1}-1\right)\equiv1(8\times1-1)[7]$ أي
$15\left(16^{n+1}-1\right)\equiv0[7]$ .

**92** 1) ـــ أ ـــ $3^4=81$ ومنه $3^4\equiv1[10]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي $p$ ، $3^{4p}\equiv1[10]$ وعليه
$3^{4p+1}\equiv3[10]$ ، $3^{4p+2}\equiv9[10]$ ، $3^{4p+3}\equiv7[10]$
ـــ ب ـــ $9^{2001}=3^{4002}=3^{4\times1000+2}$ ومنه $63\times9^{2001}\equiv3\times9[10]$ أي $63\times9^{2001}\equiv7[10]$.
$7\equiv-3[10]$ ومنه $7^{1422}\equiv(-3)^{1422}[10]$ أي $7^{1422}\equiv3^{4\times355+2}[10]$ معناه $7^{1422}\equiv9[10]$ .
إذن $63\times9^{2001}-7^{1422}\equiv(7-9)[10]$ معناه $63\times9^{2001}-7^{1422}\equiv-2[10]$ أي $63\times9^{2001}-7^{1422}\equiv8[10]$ .
2) - أ - لدينا $3n\times9^n=3n\times3^{2n}=n\times3^{2n+1}$
ولدينا $7\equiv-3[10]$ ومنه $7^{2n+1}\equiv(-3)^{2n+1}[10]$ أي $7^{2n+1}\equiv-3^{2n+1}[10]$
إذن $3n\times9^n+7^{2n+1}\equiv\left(n3^{2n+1}-3^{2n+1}\right)[10]$
أي $3n\times9^n+7^{2n+1}\equiv(n-1)3^{2n+1}[10]$ .
- ب - $3n\times9^n+7^{2n+1}\equiv0[10]$ معناه $(n-1)3^{2n+1}\equiv0[10]$ ومعناه $(n-1)3^{2n+1}\equiv0[10]$ أي$3^{2n+3}$
$(n-1)3^{4n+4}\equiv0[10]$ ويكافئ $n-1\equiv0[10]$ أي $n\equiv1[10]$ .

**93** 1) $27\equiv-1[7]$ أي $3^3\equiv-1[7]$ ومنه $3^6\equiv1[7]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي $k$ ، $3^{6k}\equiv1[7]$ وعليه
$3^{6k+1}\equiv3[7]$ ، $3^{6k+2}\equiv2[7]$ ، $3^{6k+3}\equiv6[7]$ ، $3^{6k+4}\equiv4[7]$ ، $3^{6k+5}\equiv5[7]$ .
$64\equiv1[7]$ ومنه $4^3\equiv1[7]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي $p$ ، $4^{3p}\equiv1[7]$ وعليه $4^{3p+1}\equiv4[7]$,
$4^{3p+2}\equiv2[7]$.
2) $2006\equiv4[7]$ ؛ $1424\equiv3[7]$ ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $2006^{3n+2}\equiv4^{3n+2}[7]$ ؛ $1424^{6n+1}\equiv3^{6n+1}[7]$
ومنه $2006^{3n+2}\equiv2[7]$ ؛ $1424^{6n+1}\equiv3[7]$ إذن $2\times2006^{3n+2}+1424^{6n+1}\equiv(2\times2+3)[7]$ أي
$2\times2006^{3n+2}+1424^{6n+1}\equiv0[7]$ .
3) $2\times3^0+2\times3^1+...+2\times3^n=2\left(3^0+3^1+...+3^n\right)$

$$2\times3^0+2\times3^1+...+2\times3^n=3^{n+1}-1$$
$$3\times4^0+3\times4^1+...+3\times4^n=3\left(4^0+4^1+...+4^n\right)$$

إذن $3\times4^0+3\times4^1+...+3\times4^n=4^{n+1}-1$ ، $s_n=u_0+u_1+...+u_n=3^{n+1}+4^{n+1}-2$

| $n\equiv$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $[6]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3^{n+1}\equiv$ | 3 | 2 | 6 | 4 | 5 | 1 | $[7]$ |
| $4^{n+1}\equiv$ | 4 | 2 | 1 | 4 | 2 | 1 | |
| $s_n\equiv$ | 5 | 2 | 5 | 6 | 5 | 0 | |

**94** 1) $49\equiv-1[10]$ أي $7^2\equiv-1[10]$ ومنه $7^4\equiv1[10]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي $k$ ، $7^{4k}\equiv1[10]$
وعليه $7^{4k+1}\equiv7[10]$, $7^{4k+2}\equiv9[10]$ , $7^{4k+3}\equiv3[10]$ .

. $7^{4k}+7^{4k+1}+7^{4k+2}+7^{4k+3}=(1+7+9+3)[10]$

. $7^{4k}+7^{4k+1}+7^{4k+2}+7^{4k+3}=0[10]$

2) من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $S_n=1+7+7^2+...+7^n$

$S_{n+4}=S_n+7^{n+1}+7^{n+2}+7^{n+3}+7^{n+4}$

$S_{n+4}=S_n+7^{n+1}\left(1+7+7^2+7^3\right)$

$1+7+7^2+7^3\equiv 0[10]$ إذن من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $S_{n+4}=S_n[10]$.

$S_0=1$ ، $S_0\equiv 1[10]$ ؛ $S_1=8$ ، $S_1\equiv 8[10]$ ؛ $S_2=57$ ، $S_2\equiv 7[10]$ ؛ $S_3=400$ ، $S_3\equiv 0[10]$ ؛

$S_4=2801$ ، $S_4\equiv 1[10]$ .

لنرهن أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ $S_{4n}\equiv 1[10]$.

$S_0\equiv 1[10]$ . ونفرض أن $S_{4p}\equiv 1[10]$ .

لدينا $S_{4(p+1)}=S_{4p+4}$ وحسب السؤال السابق $S_{4p+4}=S_{4p}[10]$ إذن $S_{4(p+1)}\equiv 1[10]$ وبالتالي حسب مبدأ التراجع ينتج من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ $S_{4n}\equiv 1[10]$.

$S_{4n+1}=S_{4n}+7^{4n+1}$ ومنه $S_{4n+1}\equiv 1+7[10]$ أي $S_{4n+1}\equiv 8[10]$ .

$S_{4n+2}=S_{4n+1}+7^{4n+2}$ ومنه $S_{4n+2}\equiv(8+9)[10]$ أي $S_{4n+2}\equiv 7[10]$.

$S_{4n+3}=S_{4n+2}+7^{4n+3}$ ومنه $S_{4n+3}\equiv(7+3)[10]$ أي $S_{4n+3}\equiv 0[10]$.

## 2 - أنظمة التعداد

**95** نفرض $0<x<7$ و $0<y<7$ . $\overline{yx}=10y+x$ و $\overline{xy}=7x+y$ إذن $7x+y=10y+x$ أي $6x=9y$ معناه $2x=3y$ ومنه $2x\equiv 0[3]$ أي $4x\equiv 0[3]$ معناه $x\equiv 0[3]$ وبالتالي $x=3$ أو $x=6$

إذن $(x,y)=(3,2)$ أو $(x,y)=(6,4)$

**96** الشروط : $0<x<7$ ، $0<z<7$ ، $0\le y<7$.

$n=\overline{xyz}=7^2x+7y+z$ و $n=\overline{zyx}=11^2z+11y+x$ ومنه $49x+7y+z=121z+11y+x$ أي :

$48x-4y-120z=0$ وهذا يكافئ $12x-y-30z=0$ معناه $y=12x-30z=6(2x-5z)$

إذن $y\equiv 0[6]$ ولدينا $0\le y<7$ إذن $y=0$ أو $y=6$

إذا كان $y=0$ فإن $6(2x-5z)=0$ أي $2x=5z$ ومنه $2x\equiv 0[5]$ معناه $6x\equiv 0[5]$ أي $x\equiv 0[5]$ بما أن $0<x<7$ فإن $x=5$ ومنه $z=2$.

إذا كان $y=6$ فإن $6(2x-5z)=6$ أي $2x=5z+1$ ومنه $2x\equiv 1[5]$ معناه $6x\equiv 3[5]$ أي $x\equiv 3[5]$ بما أن $0<x<7$ فإن $x=3$ ومنه $z=1$. $(x,y,z)=(5,0,2)$ أو $(x,y,z)=(3,6,1)$

**97** $a>6$ ؛ $b+c=\overline{46}=4a+6$ ؛ $bc=\overline{555}=5a^2+5a+5$

$b$ و $c$ هما حلا للمعادلة $x^2-2(2a+3)x+\left(5a^2+5a+5\right)=0$ حيث $x$ هو المجهول

$\Delta'=(2a+3)^2-\left(5a^2+5a+5\right)$ ؛ $\Delta'=-a^2+7a+4$ ؛ $\delta=49+16=65$

$\Delta'\ge 0$ معناه $\dfrac{7-\sqrt{65}}{2}\le a\le\dfrac{7+\sqrt{65}}{2}$ ومنه $6<a\le 7{,}53$ إذن $a=7$.

ومنه المعادلة تصبح $x^2-2(17)x+285=0$ و $\Delta'=4$ إذن $x'=17-2=15$ و $x'=17+2=19$ .

بما أن $1 \le a \le b \le c$ فإن $(a,b,c)=(7,15,19)$ . ويكون $abc=1995$ .

**98** 1) $45x-28y=130$ معناه $45x=130+28y=2(65+14y)$ ؛ $45x\equiv 0[2]$ أي $x\equiv 0[2]$ .

$45x-28y=130$ معناه $28y=45x+130=5(9x+26)$ ومنه $28y\equiv 0[5]$ أي $56y\equiv 0[5]$ ومعناه $y\equiv 0[5]$ .

2) $0\le \alpha \le 9$ و $0\le \beta \le 7$ ؛ $n=2\times 9^3+9^2\alpha+9\alpha+3=90\alpha+1461$ ؛

$n=5\times 7^3+7^2\beta+7\beta+6=56\beta+1721$ .

إذن $90\alpha+1461=56\beta+1721$ ومعناه $90\alpha-56\beta=260$ أي $45\alpha-28\beta=130$

إذن $\alpha\equiv 0[2]$ و $\beta\equiv 0[5]$ بما أن $0\le \beta\le 7$ فإن $\beta=0$ أو $\beta=5$ .

إذا كان $\beta=0$ فإن $45\alpha=130$ أي $\alpha=\dfrac{28}{9}$ مرفوض.

إذا كان $\beta=5$ فإن $45\alpha=270$ أي $\alpha=6$ . إذن $n=90\alpha+1461=2001$ .

**99** $0<x<7$ ، $0<y<7$ و $0\le z<7$ .

$N=11^3x+11^2y+11z+x$ أي $N=1332x+121y+11z$

$N=7^3y+7^2y+7x+z$ أي $N=392y+7x+z$

إذن $1332x+121y+11z=392y+7x+z$ أي $1325x+10z=271y$ أي $5(265x+2z)=271y$

إذن $271y\equiv 0[5]$ ومعناه $y\equiv 0[5]$ بما أن $0<y<7$ فإن $y=5$ .

وبالتالي $265x+2z=271$ أي $265x=271-2z$ ومنه $265x=271[2]$ أي $x\equiv 1[2]$

بما أن $0<x<7$ فإن $x=1$ أو $x=3$ أو $x=5$.

إذا كان $x=1$ فإن $z=3$

إذا كان $x=3$ فإن $z$ يكون سالب

إذا كان $x=5$ فإن $z$ يكون سالب

وبالتالي $(x,y,z)=(1,5,3)$ .

**100** $n=\overline{1271x}=9^4+2\times 9^3+7\times 9^2+9+x$

1) $n\equiv 1+2+7+1+x\,[8]$ أي $n\equiv 3+x\,[8]$ .

يكون $n\equiv 0[8]$ معناه $x+3\equiv 0[8]$ أي $x\equiv 5[8]$ وبما أن $0\le x<9$ فإن $x=5$ .

2) $n=\overline{1271x}=9^4+2\times 9^3+7\times 9^2+9+x$

$n=9^3(9+2)+7\times 9^2+9+x$ ؛ $n\equiv 4+x\,[11]$

يكون $n\equiv 0[11]$ معناه $x+4\equiv 0[11]$ أي $x\equiv 7[11]$ وبما أن $0\le x<9$ فإن $x=7$ .

**101** $0\le x\le 9$ و $0\le y\le 9$ . $n=\overline{27x85y}$ ؛ $n=2\times 10^5+7\times 10^4+x\times 10^3+8\times 10^2+5\times 10+y$

$n\equiv 2+7+x+8+5+y\,[3]$ و $n\equiv -2+7-x+8-5+y\,[11]$

معناه $n\equiv x+1+y\,[3]$ و $n\equiv -x+8+y\,[11]$

$n\equiv 0[3]$ و $n\equiv 0[11]$ معناه $x+1+y\equiv 0[3]$ و $-x+8+y\equiv 0[11]$

أي $x+y\equiv 2[3]$ و $x-y\equiv 8[11]$ .

$x-y\equiv 8[11]$ معناه $x-y\equiv -3[11]$

ومنه $(x,y)\in\{(0,3),(1,4),(2,5),(3,6),(4,7),$

$(5,8),(6,9),(8,0),(9,1)\}$

بما أن $x+y\equiv 2[3]$ فإن $(x,y)\in\{(1,4),(4,7),(8,0)\}$

$n=\overline{271854}$ أو $n=\overline{274857}$ أو $n=\overline{278850}$ .

**102** 1) إذا كان $3x\equiv 0[7]$ فإن $3\times 5x\equiv 0\times 5[7]$ وبما أن $15\equiv 1[7]$ فإن $x\equiv 0[7]$ .

العكس إذا كان $x\equiv 0[7]$ فإن $3x\equiv 3\times 0[7]$ ومنه $3x\equiv 0[7]$ .

2) $N=\overline{a_na_{n-1}...a_1a_0}$ أي $N=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+...+a_110+a_0$

$N'=\overline{a_na_{n-1}...a_1}$ أي $N'=a_n10^{n-1}+a_{n-1}10^{n-2}+...+a_210+a_1$ ومعناه

$10N'=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+...+a_210^2+a_110$ إذن $N=10N'+a_0$

$N\equiv 0[7]$ معناه $10N'+a_0\equiv 0[7]$ أي $3N'-6a_0\equiv 0[7]$ ويكافئ $3(N'-2a_0)\equiv 0[7]$ ومعناه

$N'-2a_0\equiv 0[7]$ وهذا حسب السؤال السابق .

3) $105154\equiv 0[7]$ يكافئ $10515-8\equiv 0[7]$ أي $10507\equiv 0[7]$ ويكافئ $1050-14\equiv 0[7]$ أي

$1036\equiv 0[7]$ ويكافئ $103-12\equiv 0[7]$ أي $91\equiv 0[7]$ ويكافئ $9-2\equiv 0[7]$ أي $7\equiv 0[7]$

خلاصة $7\equiv 0[7]$ معناه $105154\equiv 0[7]$ .

$263572\equiv 0[7]$ معناه $26357-4\equiv 0[7]$ ؛ $26353\equiv 0[7]$ يكافئ $2635-6\equiv 0[7]$ ؛ $2629\equiv 0[7]$ يكافئ

$262-18\equiv 0[7]$ ؛ $244\equiv 0[7]$ يكافئ $24-8\equiv 0[7]$ أي $16\equiv 0[7]$ وهذا غير صحيح إذن 263572 لا يقبل

القسمة على 7 .

**103** 1) $N=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+...+a_110+a_0$ ، $N'=a_n10^{n-1}+a_{n-1}10^{n-2}+...+a_210+a_1$ .

$N=10N'+a_0$ . $N\equiv 0[13]$ معناه $10N'+a_0\equiv 0[13]$ ومعناه $4(10N'+a_0)\equiv 0[13]$ ويكافئ

$40N'+4a_0\equiv 0[13]$ أي $N'+4a_0\equiv 0[13]$ لأن $40\equiv 1[13]$

2) $1631216\equiv 0[13]$ معناه $163121+24\equiv 0[13]$ أي $163144\equiv 0[13]$ معناه $16314+16\equiv 0[13]$ أي

$16330\equiv 0[13]$ ومعناه $1633\equiv 0[13]$ ومعناه $163+12\equiv 0[13]$ أي $175\equiv 0[13]$ ومعناه $17+20\equiv 0[13]$

أي $37\equiv 0[13]$ وهذا تناقض إذن 1631216 لا يقبل القسمة على 13 .

$48662029\equiv 0[13]$ معناه $4866202+36\equiv 0[13]$ أي $4866238\equiv 0[13]$ معناه $486623+32\equiv 0[13]$ أي

$486655\equiv 0[13]$ معناه $48665+20\equiv 0[13]$ أي $48685\equiv 0[13]$ معناه $4868+20\equiv 0[13]$ أي

$4888\equiv 0[13]$ معناه $488+32\equiv 0[13]$ أي $520\equiv 0[13]$ معناه $52\equiv 0[13]$ أي $5+8\equiv 0[13]$ معناه

$13\equiv 0[13]$ وهذا صحيح إذن $48662029\equiv 0[13]$ .

**105** 1) $(a^2+a+1)(a^2-a+1)=a^4+a^2+1$ .

2) ليكن $a$ عدد طبيعي حيث $a>1$ . ولدينا $111=a^2+a+1$ أي $10101=1\times a^4+0\times a^3+1\times a^2+0\times a+1$

$10101=a^4+a^2+1$ معناه $10101=(a^2+a+1)(a^2-a+1)$ أي $10101=111(a^2-a+1)$ ومنه 111 يقسم

10101 .

الحاصل هو $a^2-a+1=(a-1)a+1$ أي $a^2-a+1=\beta a+1=\overline{\beta 1}$ .

**106** 1) في النظام التعداد ذي الأساس $a$ لدينا $11=a+1$ و $1001=a^3+1=(a+1)(a^2-a+1)$

أي $1001=11(a^2-a+1)$ ومنه العدد $1001$ يقبل القسمة على $11$ .

2) الحاصل هو أي $a^2-a+1=(a-1)a+1=\overline{\beta 1}$ .

3) $1001=11\times\overline{\beta 1}$

في النظام ذي الأساس $10$ يكون $1001=11\times 91$

في النظام ذي الأساس $12$ لدينا $\overline{1001}=12^3+1=1729$ ، $\overline{11}=12+1=13$ ، $\overline{\beta 1}=11\times 12+1=133$ .

ولدينا $13\times 133=1729$ .

**107** 1) ليكن $a$ عدد طبيعي ، $(a+1)^3=a^3+3a^2+3a+1$ ومنه إذا كان $a>3$ فيكون في الأساس $a$ ، $(a+1)^3=1331$ .

2) $(a+1)^4=(a^3+3a^2+3a+1)(a+1)$ ؛ $(a+1)^4=a^4+4a^3+6a^2+4a+1$

ومنه إذا كان $a>6$ فيكون في الأساس $a$ ، $(a+1)^4=14641$.

**108** 1) $n^2+2=(n^2+1)+1=\overline{11}$ ؛ $n^2+2n=(n^2+1)+(2n-1)=\overline{1(2n-1)}$؛

$(n^2+2)^2=\left[(n^2+1)+1\right]^2$ ؛ $(n^2+2)^2=(n^2+1)^2+2(n^2+1)+1=\overline{121}$ ؛

$n^4=(n^4-1)+1=(n^2-1)(n^2+1)+1$ ؛ $n^4=\overline{(n^2-1)1}$ .

ـ التحقيق من أجل الأساس $a=5$ أي $n=2$ .

$n^2+2=6$ و $\overline{11}=5+1=6$.

$n^2+2n=8$ و $\overline{1(2n-1)}=5+3=8$.

$(n^2+2)^2=36$ و $\overline{121}=5^2+2\times 5+1=36$.

$n^4=16$ و $\overline{(n^2-1)1}=3\times 5+1=16$.

ـ التحقيق من أجل الأساس $a=10$ أي $n=3$ .

$n^2+2=11$ و $\overline{11}=10+1=11$.

$n^2+2n=15$ و $\overline{1(2n-1)}=10+5=15$.

$(n^2+2)^2=121$ و $\overline{121}=121$.

$n^4=81$ و $\overline{(n^2-1)1}=8\times 10+1=81$.

2) $u=n(n^2+2)=n(a+1)=na+n=\overline{nn}$

$v=n^2(n^2+2)=n^2(a+1)=n^2a+n^2=\overline{n^2n^2}$

$x=u^2=n^2(a+1)^2=n^2a^2+2n^2a+n^2$ ؛ $x=(a-1)a^2+2(a-1)a+n^2=a^3+a^2-2a+n^2$

$x=a^3+(a-2)a+n^2=a^3+(n^2-1)a+n^2$ ؛ $x=\overline{10(n^2-1)n^2}$ .

$y=v^2=(n^2a+n^2)^2=n^4a^2+2n^4a+n^4$ ؛ $y=(a-1)^2a^2+2(a-1)^2a+(a-1)^2$ ؛

$y = a^4 - 2a^2 + 1 = \left(n^2+1\right)a^3 - 2a^2 + 1$ ؛ $y = a^4 - 2a^3 + a^2 + 2a^3 - 4a^2 + 2a + a^2 - 2a + 1$

$y = a^4 - 2a^2 + 1 = n^2a^3 + a^2\left(n^2 - 1\right) + 1$ ؛ $y = a^4 - 2a^2 + 1 = n^2a^3 + a^2\left(a-2\right) + 1$

. $y = a^4 - 2a^2 + 1 = \overline{n^2\left(n^2-1\right)01}$

**المسائل**

**109** $I$) 1) نفترض أن $a$ و $b$ زوجيان معا ، معناه $a \equiv 0[2]$ و $b \equiv 0[2]$ ومنه $a^2 \equiv 0[2]$ و $b^2 \equiv 0[2]$
وبالتالي $a^2 - b^2 \equiv 0[2]$ أي $N \equiv 0[2]$ .

نفترض أن $a$ و $b$ فرديان معا ، معناه $a \equiv 1[2]$ و $b \equiv 1[2]$ ومنه $a^2 \equiv 1[2]$ و $b^2 \equiv 1[2]$
وبالتالي $a^2 - b^2 \equiv 0[2]$ أي $N \equiv 0[2]$

إذن إذا كان $a$ و $b$ من نفس الشفعية فيكون $N$ عددا طبيعيا زوجيا وهذا تناقض لأن $N$ عدد طبيعي فردي وبالتالي $a$ و $b$ ليس من شفعية واحدة .

2) $N = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ ؛ بوضع $a - b = p$ و $a + b = q$ يكون $N = pq$ .

3) بما أن $a$ و $b$ ليس من شفعية واحدة فإن مجموعهما وفرقهما يكونا فرديين أي $p$ و $q$ فرديين معا .

$II$) 1) أ -

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | [9] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | 0 | 1 | 4 | 0 | 7 | 7 | 0 | 4 | 1 | [9] |

ب - $a^2 - 250507 \equiv a^2 - 1[9]$

| $b$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | [9] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b^2$ | 0 | 1 | 4 | 0 | 7 | 7 | 0 | 4 | 1 | [9] |
| $a^2 - 250507$ | 0 | 1 | 4 | 0 | 7 | 7 | 0 | 4 | 1 | [9] |
| $a^2 - 1$ | 0 | 1 | 4 | 0 | 7 | 7 | 0 | 4 | 1 | [9] |
| $a^2$ | 1 | 2 | 5 | 1 | 8 | 8 | 1 | 5 | 2 | [9] |

جـ - من السؤال أ ـــ لا يمكن أن تكون الأعداد 2 ، 5 و 8 بواقي لمربع بترديد 9 وبالتالي $a^2 \equiv 1[9]$ هي الحالة الوحيدة الممكنة وينتج أن $a \equiv 1[9]$ أو $a \equiv 8[9]$.

2) أ ـــ $a^2 - 250507 = b^2$ ومنه $a^2 - 250507 \geq 0$ ويكافئ $a \leq -\sqrt{250507}$ أو $a \geq \sqrt{250507}$ بينما $a$ عدد طبيعي إذن $a \geq \sqrt{250507}$ أي $a \geq 500,51$ ومنه $a \geq 501$ .

ب ـــ $a^2 - 250507 = 501^2 - 250507 = 494$ إذن $b^2 = 494$ أي $b = 22,23$ إذن $a \neq 501$ .

3) أ ـــ نفرض $a \equiv 8[9]$ ، لدينا $503 \equiv 8[9]$ معناه $8 \equiv 503[9]$ ومنه $a \equiv 503[9]$.

نفرض $a \equiv 1[9]$ ، لدينا $505 \equiv 1[9]$ معناه $1 \equiv 505[9]$ ومنه $a \equiv 505[9]$.

ب ـــ $a = 505 + 9k$ معناه $a^2 - 250507 = 81k^2 + 9090k + 4518$ ويكافئ $b^2 = 81k^2 + 9090k + 4518$ أي $b^2 = 9\left(9k^2 + 1010k + 502\right)$

من أجل $k = 0$ لدينا $b^2 = 4518$ أي $b = 3\sqrt{502}$ مرفوض .

من أجل $k = 1$ لدينا $b^2 = 9 \times 1521 = 117^2$ أي $b = 117$ إذن أصغر عدد طبيعي $k$ حيث تكون الثنائية $(505 + 9k\ ,b)$ تحقق العلاقة $(E)$ هو $k = 1$ وبالتالي $(a,b) = (514,117)$ .

$III$) 1) $a^2 - 250507 = b^2$ معناه $250507 = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ أي $250507 = 397 \times 631$ .

2)

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | |
| 631 | 397 | 234 | 163 | 71 | 21 | 8 | 5 | 3 | 2 | 1 | 0 |

إذن $p\gcd(631,397)=1$ .

**110** جزء $I$ ـــ

1) لدينا $1^2+3^2+5^2=35=4\times8+3$ ومنه $1^2+3^2+5^2\equiv3[4]$ أي $1^2+3^2+5^2\equiv2^2-1\left[2^2\right]$

2) نفترض أن $n=3$ .

| أ- | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | $r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 1 | 0 | $R$ |

ب - من أجل كل ثلاث أعداد $R_1$ ، $R_2$ و $R_3$ من المجموعة $\{0,1,4\}$ يكون $R_1+R_2+R_3\neq0$ .

إذن لا يمكن إيجاد $x$ ، $y$ و $z$ حيث $x^2+y^2+z^2\equiv7[8]$ .

الجزء $II$ ـــ دراسة الحالة العامة مع $n\geq3$ .

1) لدينا $x^2+y^2+z^2\equiv\left(2^n-1\right)\left[2^n\right]$ معناه $x^2+y^2+z^2=2^np+2^n-1=2^n(p+1)-1$ ومنه $x^2+y^2+z^2$ عدد فردي .

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)$ .

إذن $(x+y+z)^2$ هو عدد فردي وبالتالي $x+y+z$ عدد فردي .

إذن تكون الأعداد $x$ ، $y$ و $z$ كلها فردية أو واحد منها فري وآخرين زوجيين .

2) نفترض أن $x$ و $y$ زوجيان و $z$ فردي .

أ - $x=2p$ ، $y=2k$ و $z=2l+1$ ومنه $x^2=4p^2$ ، $y^2=4k$ و $z^2=4l^2+4l+1$ إذن $x^2\equiv0[4]$ ، $y^2\equiv0[4]$ و $z^2\equiv1[4]$ وبالتالي $x^2+y^2+z^2\equiv1[4]$ .

**ب -** بما أن $n\geq3$ فإن $2^n\equiv0[4]$ أي $2^n=4\alpha$ ولدينا $x^2+y^2+z^2=2^np+2^n-1=2^n(p+1)-1$ أي $x^2+y^2+z^2=4\alpha(p+1)-1$ وبالتالي $x^2+y^2+z^2\equiv-1[4]$ أي $x^2+y^2+z^2\equiv3[4]$ وهذا تناقض مع النتيجة السابقة .

3) نفترض أن $x$ ، $y$ و $z$ كلها فردية .

أ - $k^2+k=k(k+1)$ جداء عددين متتاليين هو عدد زوجي أي $k^2+k\equiv0[2]$ .

**ب -** ليكن $t$ عدد طبيعي فردي أي $t=2k+1$ ومنه $t^2=4k^2+4k+1=4\left(k^2+k\right)+1$ وبما أن $k^2+k\equiv0[2]$ فإن $k^2+k\equiv2k'$ إذن $t^2=8k'+1$ أي $t^2\equiv1[8]$

بما أن $x$ ، $y$ و $z$ كلها فردية . فإن $x^2\equiv1[8]$ ، $y^2\equiv1[8]$ و $z^2\equiv1[8]$ وبالتالي $x^2+y^2+z^2\equiv3[8]$ .

**جـ -** الخلاصة : $x^2+y^2+z^2=2^n(p+1)-1$

من أجل $n\geq3$ يكون $2^n\equiv0[8]$ إذن $x^2+y^2+z^2\equiv-1[8]$ أي $x^2+y^2+z^2\equiv7[8]$ وهذا تناقض مع النتيجة $x^2+y^2+z^2\equiv3[8]$

إذن لا توجد أي ثلاثية $(x,y,z)$ تحقق $x^2+y^2+z^2\equiv\left(2^n-1\right)\left[2^n\right]$ مع $n\geq3$ سواء كانت $x$ ، $y$ و $z$ كلها فردية أو واحد منها فردي والآخرين زوجيين ؛ وبالتالي $n=2$ هي الحالة الوحيدة التي توجد فيها ثلاثية $(x,y,z)$ تحقق $x^2+y^2+z^2\equiv\left(2^n-1\right)\left[2^n\right]$

# الباب الرابع

# الأعداد الأولية

# الأنشطة

**النشاط الأول**

**تصحيح:** /

**الهدف:** مقاربة مفهوم المضاعف المشترك الأصغر.

**توجيهات:** يقدم النشاط كمدخل للفقرة " المضاعف المشترك الأصغر لعددين".

**الحل:**

نشاط 1 :

1) اللحظات التي يمر فيها الضوء الأول إلى الأخضر هي $90k$ مع $k$ عدد طبيعي .

2) اللحظات التي يمر فيها الضوء الثاني إلى الأخضر هي $95k$ مع $k$ عدد طبيعي.

3) $M_{90}=\{0,90,180,270,...,1710,...,86310,86400\}$

4) $M_{95}=\{0,95,190,285,...,1710,...,86260,86355\}$

5) $M_{90}\cap M_{95}=\{0,1710,3420,...,83790,85500\}$ .

6) اللحظات بالثانية التي يمرّ فيها الضوءان إلى الأخضر في آن واحد هي عناصر المجموعة $M_{90}\cap M_{95}$

7) $1710$ (بعد منتصف الليل) .

8) الساعة السابعة توافق $25200s$ بعد منتصف الليل و الساعة السابعة والنصف توافق $27000s$ بعد منتصف الليل بوضع $25200\le 1710k\le 27000$ نجد $14,73\le k\le 15,78$ بما أن $k$ عدد طبيعي فإن $k=15$ .

وبالتالي اللحظة بين الساعة السابعة والساعة السابعة والنصف هي $26650s$ أي الساعة 7 و 16 الدقيقة و 40 ثانية.

9) a) $t=90u$ .

b) $V_m=45Km/h=\frac{45000}{3600}m/s=12,5m/s$ الوقت المستغرق بين الضوئين هو $\frac{875}{12,5}s=70s$.

إذا كان $u$ عدد المرات يمر فيها الضوء الأول إلى الأخضر خلال الزمن $t$ فإن $v+1$ هو عدد المرات يمر فيها الضوء الثاني إلى الأخضر ولكن عند الوصول إليه أي خلال الزمن $t+70$ وبالتالي $(v+1)95=t+70$.

c) بتعويض $t=90u$ في $t+70=95(v+1)$ نجد $90u-95v=95-70=25$ أي $18u-19v=5$.

d) $18u-19v=5=95-90=19\times5-18\times5$ ومعناه $18u+18\times5=19v+19\times5$

أي $18(u+5)=19(v+5)$.

e) استنتج قيم $u$ و $v$ ثم قيم $t$

العدد $18(u+5)$ يقبل القسمة على 19 وبما أن 19 أولي فإنه موجود في تحليل $18(u+5)$ إلى جداء عوامل أوّلية وبما أنه أولي مع 18 فإنه غير موجود في تحليل 18 إذن هو موجود في تحليل $(u+5)$ أي 19 قاسم لـِ $(u+5)$

أي : $u+5=19\alpha$ مع $\alpha$ عدد طبيعي وبالتعويض في $18(u+5)=19(v+5)$ نجد $v+5=18\alpha$

خلاصة $u=19\alpha-5$ و $v=18\alpha-5$ مع $\alpha$ عدد طبيعي. $t=90u=90(19\alpha-5)=1710\alpha-450$

f) $25200\le 1710\alpha-450\le 27000$ أي $15\le\alpha\le 16,05$ إذن $t=1710\times15-450=25200$

أو $t=1710\times16-450=26910$ أي : الساعة 7 و 0 دقيقة و 0 ثانية أو الساعة 7 و 28 دقيقة و 30 ثانية.

**النشاط الثاني**

**تصحيح:** /

**الهدف:** توظيف الموافقات و الأعداد الأولية في وضعية لها دلالة.

**توجيهات:** يقدم ضمن أفواج.

**الحل:** بسيط

# الأعمال الموجهة

**تعيين معاملي بيزو**

**تصحيح:** /

**الهدف:** توظيف مجدول اكسال لتعيين معاملي بيزو.

**توجيهات:** يقدم العمل في شكل أفواج مع استغلال جهاز الداتاشو.

**الحل:** يكفي إتباع مختلف التوجيهات المقدمة لبلوغ النتائج المتوخاة.

**المبرهنة الصغيرة لـ فيرما**

**تصحيح:** /

**الهدف:** توظيف الموافقات و الأعداد الأولية.

**توجيهات:** يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

**الحل:** معقد.

# التمارين

التمارين التطبيقية

**1 - الأعداد الأوّلية .**

**2** أ ـــ $1429$ لا يقبل القسمة على $2$ ولا على $3$ ولا على $5$ ؛ $1429 = 7\times 204 +$ ، $1429 = 11\times 129 +$ ، $1429 = 13\times 109 +$ ، $1429 = 17\times 84 +$ ، $1429 = 19\times 75 +$ ، $1429 = 23\times 62 +$ ، $1429 = 29\times 49 +$ ، $1429 = 31\times 46 +$ ، $1429 = 37\times 38 +$ ، $1429 = 41\times 34 +$ ؛ عدد القسمات هو $13$.

ب ـــ $1429$ أولي .

**3** أ - الخاصية $2$ صفحة $90$ .

ب - $\sqrt{853} \approx 29,2$ و $853$ لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية $2$ ، $3$ ، $5$ ، $7$ ، $11$ ، $13$ ، $17$ ، $19$ ، $23$ ، $29$ ، إذن العدد $853$ أولي.

**4** أ - $251$ أولي. ب - $341$ليس أوليا.

ج - $1023$ليس أوليا.

**7** إذا كان $n = 2$ فإن $n + 7 = 9$ وهو غير أولي.

إذا كان $n > 2$ فإن $n$ فردي ومنه $n + 7$ يكون زوجيا يقبل القسمة على $2$ وهو غير أولي.

**15** $n^2 + 8n + 15 = (n+3)(n+5)$ ليس أوليا .

**17** أ - $\sqrt{173} \approx 13,15$ و $173$ لا يقبل القسمة على $2$ ، $3$ ، $5$ ، $7$ ، $11$ ، $13$ إذن العدد $173$ أولي .

ب - $x^2 - y^2 = 173$ معناه $(x-y)(x+y) = 173$

إذن $x - y = 1$ و $x + y = 173$ أي $(x, y) = (87,86)$

ج ـــ $p$ عدد طبيعي أوّلي فردي . $x - y = 1$ و $x + y = p$ ومنه $(x, y) = \left(\dfrac{p+1}{2}, \dfrac{p-1}{2}\right)$ .

## 2 - المضاعف المشترك الأصغر لعددين .

**28** أ - $ppcm(26,12)=156$ .

ب - $ppcm(18,-15)=90$ .

جـ - $ppcm(-12,-13)=156$ .

د - $ppcm(230,128)=14720$ .

هـ - $ppcm(876,1028)=225132$

**29** * $\frac{9}{140}+\frac{13}{84}=\frac{27+65}{420}=\frac{92}{420}=\frac{23}{105}$ .

* $\frac{55}{195}+\frac{23}{216}=\frac{1091}{2808}$ . * $\frac{82}{75}+\frac{19}{210}=\frac{1243}{1050}$ .

**30** في كل حالة من الحالات التالية ، عين قيم العدد الطبيعي $a$ غير المعدومة حيث :

**أ -** $ppcm(a,56)=392$ ؛ نضع $p\gcd(a,56)=d$

معناه $a=da'$ ، $56=db'$ و $p\gcd(a',b')=1$ .

لدينا $56a=392d$ أي $a=7d$ إذن $p\gcd(7,b')=1$

أي $p\gcd\left(7,\frac{56}{d}\right)=1$ إذن $d\in\{7;14;28;56\}$

$a\in\{49;98;196;392\}$ .

**ب -** $ppcm(a,18)=630$ ؛ $a\in\{35;70;210;315;630\}$ .

**31** أ ـــ $n\equiv 3[35]$ و $n\equiv 3[28]$ معناه $n-3\equiv 0[35]$ و $n-3\equiv 0[28]$ إذن $n-3$ مضاعف مشترك للعددين 35 و 28 .

أصغر قيمة لـــ $n-3$ هي $ppcm(28,35)=140$

إذن أصغر قيمة للعدد $n$ هي 143.

**32** $a=52p+7=64p'+7$ ومنه $a-7=52p=64p'$ إذن $a-7=ppmc(52,64)=832$ أي $a=839$ .

**33** $n\in\mathbb{N}^*$ ؛ $p\gcd(n,2n+1)=1$ ومنه $ppcm(n,2n+1)=n(2n+1)$ .

**34** لدينا $ppcm(2n+2,4n+2)=2ppcm(n+1,2n+1)$

و $p\gcd(n+1,2n+1)=1$ إذن

$ppcm(n+1,2n+1)=(n+1)(2n+1)$ ومنه

$ppcm(2n+2,4n+2)=2(n+1)(2n+1)$ .

**35** $n\in\mathbb{N}^*$ ؛ $a=(3^{2n}-1)(7^{2n}-1)$

$a=(3^n-1)(3^n+1)(7^n-1)(7^n+1)$؛

$a=b(3^n-1)(7^n-1)$؛ $a$ مضاعف لـ $b$ إذن

$ppcm(a,b)=a$ .

**40** أ ـ $\begin{cases} a+b=60 \\ ppcm(a,b)=40 \end{cases}$ ؛ $p\gcd(a,b)=d$ ،

$a=da'$ ، $b=db'$ مع $p\gcd(a',b')=1$ .

لدينا $ab=40d$ معناه $a'b'd=40$ .

ولدينا $a+b=60$ معناه $d(a'+b')=60$ .

وبالتالي $d$ يقسم $p\gcd(40,60)=20$ أي $d\in\{1,2,4,5,10,20\}$ .

لدينا $a'+b'=\dfrac{60}{d}$ و $a'b'=\dfrac{40}{d}$ إذن $a'$ و $b'$ هما حلا المعادلة $x^2-\dfrac{60}{d}x+\dfrac{40}{d}=0$ أي $dx^2-60x+40=0$

المميز المختصر هو $\Delta'=900-40d$ ؛ إذا كان $d\in\{1,2,4,5,10\}$ فإن

$\sqrt{\Delta'}\notin\mathbb{N}$ وبالتالي الحلان ليس طبيعيان.

إذا كان $d=20$ فإن $\Delta'=100$ ومنه $x'=1$ و $x''=2$ ؛ ومنه $(a',b')=(1,2)$ أو $(a',b')=(2,1)$

إذن $(a,b)=(20,40)$ أو $(a,b)=(40,20)$ .

ب ـ $\begin{cases} a-b=22932 \\ ppcm(a,b)=98280 \end{cases}$ ؛ $d$ يقسم $p\gcd(22932,98280)=3276$ أي

$d\in\{1,2,3,4,6,7,9,12,13,14,18,21,26,28,36,39,42,52,63,78,84,91,117,126,156,182,234,$
$252,273,364,468,546,819,1092,1638,3276\}$

الحالة الوحيدة التي تحقق وهي $d=3276$ ونجد $a=32760$ و $b=9828$

**41** أ ـ $ppcm(a,b)=21\times p\gcd(a,b)$ .

$ab=md$ معناه $a'b'd=m$ أي $a'b'=21$ ونجد $(a,b)\in\{(d,21d);(3d,7d);(7d,3d);(21d,d)\}$ مع

$d\in\mathbb{N}^*$ .

ب ـ $ppcm(a,b)-p\gcd(a,b)=187$ .

$m-d=187$ معناه $d(a'b'-1)=187=11\times17$

ومنه $d\in\{1,11,17,187\}$ ثم ندرس الحالات

## 3 - مبرهنة بيزو .

**46** أ ـ $a=n$ ؛ $b=2n+1$ . $-2a+b=1$

ب ـ $a=2n+3$ ؛ $b=3n+5$ . $-3a+2b=1$

**47** تطبيق مبرهنة بيزو $11(7n+2)-7(11n+3)=1$ معناه $PGCD(11n+3,7n+2)=1$ .

$PGCD(n,n^2+1)=1$ .

**49** $n$ عدد طبيعي غير معدوم .

أ ـ بالنشر نجد : $(n^3+1)^2=n^2(n^4+2n)+1$ .

ب ـ $(n^3+1)^2-n^2(n^4+2n)=1$ بوضع $\alpha=n^3+1$ و $\beta=-n^2$ حسب مبرهنة بيزو يكون العددان

$n^3+1$ و $n^4+2n$ أولّيين فيما بينهما .

## 4 - مبرهنة غوص .

**60** نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x, y)$ التالية $(1) \ldots 2045x - 64y = 1$

1) $PGCD(2045, 64) = 1$ .

2) حسب مبرهنة بيزو المعادلة $(1)$ تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$ . $(21, 671)$ هو حل خاص للمعادلة $(1)$.

3) $2045x - 64y = 1$ و $2045 \times 21 - 64 \times 671 = 1$ إذن

$2045(x - 21) - 64(y - 64) = 0$ أي $2045(x - 21) = 64(y - 64)$

64 يقسم $2045(x - 21)$ و $PGCD(2045, 64) = 1$

إذن حسب مبرهنة غوص 64 يقسم $x - 21$ أي $x - 21 = 64k$ مع $k \in \mathbb{Z}$ وبالتعويض نجد $y - 64 = 2045k$ .

## 5 - المبرهنة الصغيرة لفرما .

**66** $7^{10} \equiv 1[11]$ حسب مبرهنة فرما.

$7^{2521} = 7 \times 7^{2520} = 7 \times (7^{10})^{252}$ ومنه $7^{2521} \equiv 7[11]$ .

**68** حسب نتيجة فرما : $n^5 \equiv n[5]$ و $n^3 \equiv n[3]$ وهذا من أجل $n \in \mathbb{Z}$ لأن كل من 5 و 3 أولي.

$n^5 \equiv n[5]$ معناه $n^5 - n \equiv 0[5]$

من $n^3 \equiv n[3]$ ينتج أن $n^2 \times n^3 \equiv n^2 \times n[3]$ ومنه $n^5 \equiv n[3]$ أي $n^5 - n \equiv 0[3]$ بما أن 5 و 3 أوليان فيما بينهما فإن $n^5 - n \equiv 0[15]$ .

**71** 1) $x^3 \equiv x[3]$ لأن 3 أولي.

2)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x \equiv$ | 0 | 1 | 2 | 3 | $[4]$ |
| $x^3 \equiv$ | 0 | 1 | 0 | 3 | $[4]$ |

إذن $x \equiv 0[4]$ أو $x \equiv 1[4]$ أو $x \equiv 3[4]$

3) $x^3 \equiv x[12]$ معناه $x \equiv 0[4]$ أو $x \equiv 1[4]$ أو $x \equiv 3[4]$ .

## 6 - تشفير الكلمات

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ض | ص | ش | س | ز | ر | ذ | د | خ | ح | ج | ث | ت | ب | أ |
| 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ي | و | ه | ن | م | ل | ك | ق | ف | غ | ع | ظ | ط |
| 27 | 26 | 25 | 24 | 23 | 22 | 21 | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 |

**73** نقوم بعملية التشفير باستعمال التحويل $x \mapsto y$ حيث $y$ هو باقي قسمة $x + 3$ على 28 .

1) تشفير كلمة " **الجزائر**" هو " **ثهدصثثش** ".

2) ليكن $y$ من المجموعة $\mathscr{N}$ ، $x + 3 \equiv y[28]$ معناه $x \equiv y - 3[28]$؛ إذا كان $y \geq 3$ فإن $x = y - 3$ وإذا كان $y < 3$ فإن $x = y - 3 + 28 = y + 25$

3) حل تشفير : **تبضل:** يوسف ؛ **لثغوا ثهصاشثث:** فاطمة الزهراء ؛ **وذوز** : محمد.